超対称ゲージ理論と幾何学

非摂動的アプローチ

佐古彰史

Supersymmetric Gauge Theory and Geometry

Nonperturbative approach

日本評論社

はじめに

ゲージ理論，特に超対称性を持つゲージ理論の非摂動的効果に関する解説が本書の内容で，94 年のサイバーグ-ウィッテン理論からドナルドソン-ウィッテン理論や非可換空間上のインスタントン，03 年のネクラソフの公式の証明にいたるまでの解説を一冊にまとめました．これらの内容は超対称性や双対性，超弦理論，非可換時空という理論や概念と密接に結びついています．

例えばドナルドソン理論とサイバーグ-ウィッテン理論の関係は，双対性の認識によって予想が生まれました．双対性それ自身も超弦理論を用いて幾何学的な理解が得られます．超弦理論は自然と非可換幾何を内包し，従来の多様体の概念から逸脱した幾何を必要とします．超弦理論が正しければ，量子力学のように「座標」と「運動量」の非可換だけではなく，本当に我々の住む空間の座標同士が非可換であるというのです．そして非可換性が理論の特異性を和らげ理論の計算を容易にし，非摂動効果の計算を可能にしたりするのです．

また別の場面では，超対称性という強力な対称性を最大限に生かして，従来の場の理論では考えられなかった方法により非摂動的な効果を求めています．これらの結果は素粒子物理のみならず数学にも大きな影響を与えてきました．それにもかかわらず，専門家むけではなく，それでいて計算の過程が理解できるような適当な分量の教科書が和書には無いようです．

本書では，物理の予備知識がない数学者や，場の理論を学んでみようと考えているが近年の非摂動的効果の進展についてまず知りたいと考えている読者を対象として，こうした一連の流れを紹介するのを目的としています．なにぶん著者が浅学なため，どこまで目的が達成できるかは怪しい限りですが，多少なりとも読者の知的好奇心を刺激できれば幸いです．

もともと本書を書くきっかけは，「物理学的な手法で幾何的な結果を導出する

様子を，可能な限り予備知識なしに説明する」ことを目標にした数学者を対象の集中講義でした．高校卒業以来一度も物理に触れたことの無い数学者でも通読できるよう，物理に関しては一切の予備知識を仮定していません．しかしそのために紙数が多くなりすぎると入門の前に門前払いの感がしますので，可能な限り紙数を減らすよう努力しました．

したがって，正確な記述や重要な問題を多数思い切って切り捨て，とにかく物理学者のアプローチや理解の仕方を限りなく簡単に短時間で感じ取ることを目標にしています．証明を記述せず，簡単な例を提示することで済ませている部分があるのもそのためです．専門家以外の人が物理の論文を読むときに困らないように，記述の方法も物理の論文や教科書に近くなっていますし，なるべく原論文の記法と論理の展開を尊重しています．

本書で概略さえつかめたら，詳しい教科書はそれこそ無数にあるのですから，それを適時読んでいただくことで，さらに進んで勉強することも厳密な議論に挑戦することも可能でしょう．短い解説でもない限り，なかなか知らない分野の教科書に手を出すのは難しいですし，だからといって他分野の教科書を何冊も頭から読むことは不可能ではと思い，最初の章は本書に必要な物理的知識の速習コースにあてています．場の理論について知っている読者は飛ばして 2 章から読むことが可能です．

一方で数学の予備知識としては，線形代数と微分積分，複素関数，接続や曲率などの微分幾何，それと $SU(N)$ やローレンツ群程度についての連続群の知識を前提としています．3 章についてはトポロジー（特に 4 次元のトポロジー）の知識を前提としていますが，物理的な記述を定義と受け入れることで，読み流すことも可能です．より高度な数学的内容に関しても関連するおまけの話題として触れている箇所がありますが，しっかり計算まで書いているところに必要な知識は先ほど書いた初等的な数学だけです．

内容は大きくわけて，「場の理論の必要最小限の速習」「双対性の入門」「位相的場の理論入門」「非可換空間上の場の理論」「ネクラソフの公式」に分かれています．

1 章の「場の理論の必要最小限の速習」はなるべく具体的に理解できるように計算も詳しく書きましたが，反面計算が面倒で後半の話題を展開するうえで省い

てもいい話題は除きました．したがって，場の理論を全般的に学べるのではなく，本書の理解に必要な最小限の物理の概略を直観的にとらえる程度です．

例えばダイナミカルな解析には全く触れていません．計算が大変であるという理由と優れた解説書が他に存在するという理由で「アノマリー」についてはかなり省略しました．アノマリーと指数定理の関連は，場の量子論と幾何学の結びつきの最も美しい部分の一つですが，そのあたりに興味のある読者は，例えば日本語でも読むことのできる教科書として [1], [2] などを参照してください．また一方で，非常に短い速習コースにしては超対称性については詳しく書いています．これはその後の双対性や位相的場の理論の理解には欠くことのできない重要な概念だからです．

次の 2 章で扱うサイバーグ-ウィッテンの双対性は，ドナルドソン理論からサイバーグ-ウィッテン理論へ達する上でも重要な鍵となった $\mathcal{N}=2$ 超対称性ゲージ理論の双対性です．$\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論の非摂動効果を理解することが本書の主目標であるとするならば，この双対性の理解が目標であると言い換えてもいいでしょう．実際，2 章から後もたびたびこの双対性が登場し，最終章のネクラソフの公式で再び正面から対決することになります．単純に位相的場の理論の経路積分による定式化を見ることが目的の読者には 2 章は必ずしも必要がないのですが，背景にある超対称ゲージ理論の重要な性質についての章であり，94 年以来の超弦理論を含めた理論の革命の元になるアイディアがここにあります．

しかし，このサイバーグ-ウィッテンの双対性の理解はそれほど容易では無いと思われます．すでに伝統的な場の理論の勉強を行った人には特に，解析手法の飛躍に戸惑うかもしれません．筆者自身，初めにサイバーグ-ウィッテンの論文が登場して以来常に戸惑わされ悩まされながら，一方でその魅力にとりつかれてきました．その魅力は奥深く，いまだに論文を再読するとアイディアの再発見があると同時に，新しい謎も沸き起こるのです．そういう意味でも，一度に 2 章の内容を理解しようと思わないほうがいいかもしれません．5 章の一つのメインテーマは 2 章の内容の再現ですから，初めに 2 章を読んだときはいろいろな疑問を抱えたままにしておき，最後まで読んだ後でもう一度戻ってみるのもいいでしょう．

3 章「位相的場の理論」のテーマは，4 次元のトポロジーの理論であるドナルドソンとサイバーグ-ウィッテン理論のマタイ-キレン形式での構成法と $\mathcal{N}=2$ 超対称

性ゲージ理論からの構成法の両方について解説します．両者がなぜ等価と予想されるのかという点にも重点をおいています．また，もう一つの成功例としてヴァッファ-ウィッテン理論についてもふれています．そこにはS-双対性 (S-duality) と呼ばれる双対性が現れますが，超弦理論による解釈も割合容易につけることができるのでそれについても紙数をさきました．

4章では「非可換時空上の場の理論」のいくつかの話題について取り上げました．非可換空間上の場の理論がなぜ素粒子物理学で重要になってきたかについてのいくつかの話題にふれ，その後で近年の大きな成果の一つである非可換ユークリッド空間上のインスタントンについて特に詳しく解説しました．

最後の5章では今後の展望をこめて，非可換時空上の位相的場の理論についてと，その成功例として$\mathcal{N}=2$超対称性ゲージ理論の低エネルギー有効理論を直接求めたネクラソフの公式について解説しました．ネクラソフの公式は，サイバーグ-ウィッテンの双対性を用いて得られた結果を再現するものですが，3章で用いられた位相的場の理論の技術と4章の非可換空間上の場の理論の技術などを用いて計算されます．そういう意味では，本書の最終章には相応しいテーマと言えるでしょう．そこでは2章で語られる意味での双対性を超えて，非摂動的な結果を導出しているのです．

読み進める上での注意点を述べます．基本的に全く物理の知識を前提としていないので本書に出てくる大部分の式をフォローすることは可能ですが，いくつかの箇所でこの教科書の知識だけでは計算のフォローができないところと，重要な点を簡素に伝えるために正確さを犠牲にしているところがあります．

例えば摂動計算の結果などは，他に多くの教科書もあることから大胆に一切の導出を割愛しました．そのような箇所，すなわちギャップが存在し計算をきっちり追うことのできない部分では必ず本文中にその旨を記述してあります．したがって，そういったギャップが気になる読者は参考文献にあたってください．なお，本書に書かれている定理や計算結果は，数学的に見ると確立されていない手法を用いている場合があり，その意味で厳密には「予想」と書かれるべきこともあります.「超対称ゲージ理論の双対性」などは物理学者自身も「予想」と認識していますが，例えば「経路積分」や「くりこみ」など物理学者が常識として用い，本書の中でも使われている量子論の方法の中には，数学的に確立されていな

いものが多々あります．したがって，古典理論（量子化していない理論）の結果はともかく，量子論の結果に関しては注意が必要です．

しかしヴァッファが述べているように，場の理論や弦理論を用いて数学的問題に取り組むことは，幾何の問題を作図によってイメージを明確にして予想を立て易くするがごとき効能があります．したがって，厳密に証明されていない理論でも，その道具を手にすることは，決して損なことではないでしょう．

この本は名古屋工業大学の集中講義のために用意された講義ノートをベースとして大幅に加筆してできたものです．したがって名古屋工業大学の南範彦先生のおかげで，この本が生まれました．また，研究集会「指数定理とその周辺」でお話させていただいた内容なども掲載させていただきました．そういった経緯も含め，いろいろといつも研究にご助言をいただいている古田幹雄先生にも大変お世話になりました．また非可換幾何関係の研究集会で話した内容なども含んでおり，慶應大学でいろいろとご教授いただいている前田吉昭先生，森吉仁志先生，亀谷幸生先生をはじめ，関係する皆様に深くお礼申し上げます．また場の理論の基礎を教えていただいたのは北海道大学の石川健三先生や河本昇先生，中山隆一先生，鈴木久男先生，末広一彦先生であり，代数についての様々な質問に答えていただいた中村郁先生にも深く感謝します．

本書を通読していただき細部に至るまで貴重な意見をいただくとともに多くの誤りを御指摘くださった名古屋大学の菅野浩明先生には感謝の言葉もありません．共同研究者である石川智己君，黒木伸一郎君が用意してくれた図を本書でも使っており，多くの点で鈴木俊哉君と議論し，あるいは教えてもらった内容が反映されています．また日本評論社の佐藤大器さんと筧裕子さんをはじめとする多くの方々には，悪文と酷く不恰好な $\TeX$ のファイルでご迷惑をおかけしたことをお詫びするとともにお礼を申し上げます．また私を支えてくれてきた両親と妻にもこの場を借りて深く感謝の意を表します．

追記：原稿を 2006 年 7 月に一度書き上げてから，内容の訂正や校正などを行っている間に，オクニコフがフィールズ賞を受賞したというニュースが飛び込んできました．オクニコフはネクラソフの公式の証明をネクラソフと共に与えており，その証明は本書の 5 章に詳述しています．受賞理由はこの証明にとどまら

ずに，表現論や確率論と代数幾何の間の架け橋を構築したこと全体ですが，本書からも一つの非常に特徴的な一端を感じてもらえるのではないでしょうか．彼の業績からも見てとれることですが，物理や数学の世界を覗いているとこの世界の全く無関係に思える現象が人知を超えた美しい法則で結びついていることを垣間見る幸運にめぐり合うことがあります．読者のこの美しい世界への好奇心に対して，本書が少しでも刺激になれば望外の幸せです．

2007 年 1 月　佐古彰史

目　次

第 1 章 場の理論の必要最小限の速習

場の理論と素粒子物理の範囲の中で，この本を読み進める上で必要不可欠な最小限の知識についてまとめる．特に物理の知識を前提としない代わりに，正確性は犠牲になっている箇所がある．厳密に議論し膨大な量の記述になることを防ぐために，簡単な具体例だけで説明をすませていたり，この本を読み進める上で必要性が薄い話題にはあえて触れていない話題も多い．また，計算が大変になる部分は概略だけが述べられている．したがって，本格的に学びたい方は適宜参考文献などにあたられたし．また，ある程度，場の理論に習熟されている方はこの章を飛ばして読まれることをお勧めする．

1.1 記法，慣例の注意

この節では，物理の教科書や論文を読むときに知っておく必要がある記法についてまとめておく．この本もこれらの記法に従って書かれているので，この節の内容に十分に注意されたし．

添字の種類

物理では，考えている空間が我々観測者の住む宇宙空間と時間をあわせた意味での “時空間” なのか，あるいは単に扱う物理量がベクトルで，そのベクトルが

定義されているベクトル空間という以上の意味がない空間なのかを区別する必要がある．また，時空間の座標の中でも，後で見るように時間と空間 3 成分では計量の符号が異なるので，それも区別できるようにしておく必要がある．そのためにベクトルを成分で記述し，添字を書くことで，どこに住むベクトルなのかがわかるようにする慣習がある[1)]．特に，相対性理論と矛盾のない理論であるためには，場は局所的にせよ大局的であるにせよローレンツ群 (H. Lorentz) の表現でなければならない．そのため，どの表現なのかを明確に宣言するのである．以下にそれを列記しておく．

- $\mu, \nu, \xi, \rho, \cdots$：観測者のいる空間のベクトルの添字．特に d 次元時空の座標を $(x_0, x_1, \cdots, x_{d-1})$ ととり，時間成分 $t = x_0$（または t のかわりに τ を使うこともある）とわけて x_i を空間成分とすることが多い．
- $i, j, k, l, \cdots$：空間成分の添字．または場の種類などのその他一般の識別にも用いる．
- $a, b, c, d, \cdots$：ゲージ群の作る見えない空間の添字（見えない空間を内部空間と呼ぶことが多い）．
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots$：スピノルの添字．
- σ, τ：弦理論の世界面を記述するとき，σ を弦の空間的な座標，τ を時間とすることが多い．

もちろんこれらの添字の使い分けは原則としてのことであり，適時便利がいいように変更される．したがって，完全にこの通りと思われると困るが，この使い分けを知っているだけで非常に見通しがよくなる場合が多い．

現代の素粒子論の中心的な役割を果たしているのは場の理論（ベクトル束の切断を場と呼んでいる）であることは疑う余地のないところである．この本では場の理論を中心にこれから見ていくわけであるが,「スカラー場」,「スピノル場」,「ベクトル場」,「テンソル場」などという呼び名がしばしば登場する．この名前は全て時空のローレンツ変換に対する表現としてどのようなものをとっている

[1)] 添字を単に「足」と呼ぶことがある．例えば「A_μ が時空間の足を持つ」と言うと A は時空間で定義されたベクトルで，時空間のベクトルの成分を表す添字 μ がついているという意味である．

かに由来する．したがってそれらの名前は**時空の回転（ローレンツ回転）**に対しての変換性を表す．例えば場が内部空間[2)]のベクトルであっても時空回転でスカラーであれば「スカラー場」と呼ばれる．これらの区別も添字がついていればそれだけで識別が可能である．

添字の上下

下付き添字（共変）のベクトル[3)] x_μ, 計量 $g_{\mu\nu}$（$g^{\mu\nu}$ をその逆行列とする）に対し，上付き添字（反変，双対）ベクトルを

$$x^\mu \equiv \sum_\nu g^{\mu\nu} x_\nu \tag{1.1}$$

で定義する．

アインシュタインの縮約の記法

ベクトル x_μ, y_μ と計量 $g^{\mu\nu}$ に対して内積を

$$\sum_{\mu,\nu} x_\mu y_\nu g^{\mu\nu} = x_\mu y^\mu \tag{1.2}$$

$$x^2 = x \cdot x = x_\mu x^\mu \tag{1.3}$$

と略記して書く．これをアインシュタインの縮約 (A. Einstein) の記法という．同じ添字が出てきた場合は断らない限り常にこの「縮約」をとっているものとする．また任意の階数のテンソルに対しても同様に**添字が同じときは，断らない限り縮約をとる．**

特に本書では 4 次元のユークリッド計量 (Euclid) とミンコフスキー計量 (H. Minkowski) による縮約を多く用いるが，ミンコフスキー計量には注意が必要である．というのは，通常の理論と超対称理論で使われる計量が異なることが多いのである．ミンコフスキー計量では，対角成分以外はゼロで，対角成分が以下の

---

2) 我々の住む 4 次元時空以外を区別してこう呼ぶ．例えばゲージ理論を考えたときのベース多様体は「時空」であり，ファイバーは内部空間である．

3) 微分作用素 ∂_μ と同じ座標変換を共変ベクトルと呼び，dx^μ と同じ変換をするものを反変ベクトルと呼ぶ．

ように与えられる.

$$\text{通常}: \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1), \quad \text{超対称理論}: \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \tag{1.4}$$

超対称理論では，特に 4 次元以上の高次元の理論から出発して次元を落とすなどの手法が用いられるので，次元を落とすたびに行列式の正負が入れ替わることに不便を感じてこうなってきたように思われる．したがって，この本でも超対称の部分でミンコフスキー計量を扱うときは，参考文献との整合性も考えて $\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ を用いることにする．

ただし本書では，章をまたいで引用したり比較したりする都合と，解析接続でユークリッド計量 $\mathrm{diag}(1,1,1,1)$ にしてしまうことが多いため，断りなくこれらの計量を変更して記述する．本書の内容に限定すると，これらの計量の違いによる符号の違いは重要ではないからである[4]．

自然単位系

この本のなかでは簡単のため c（光速），$\hbar$（プランク定数）(M. Planck) などを全て 1 とする単位系を使う．自然単位系と呼ばれ，素粒子物理ではしばしば用いられる．長さやエネルギーなどが混ざって慣れないうちは奇妙に感じる人もいるかも知れないが，いちいち $c, \hbar$ を書く煩わしさはない．

共役

特に断らない限り $\bar{A}$ を A の複素共役を表すものとし，$A^\dagger$ を A の複素共役して転置をとったもの，すなわちエルミート共役を表すという表記を用いる．スピノルに関しては荷電共役という概念も正確には必要だが，基本的に複素共役であり，ローレンツ群の変換性を保つために多少工夫を加えているものと考えればよい．

---

[4] こうした符号も含めて厳密に数式をフォローしたい読者は，ミンコフスキー計量ならばハミルトニアンが非負に，ユークリッド計量ならば作用が非負になるように，適当に変数を取り直すか，計量を選び直せばよい．ハミルトニアンと作用については後の節に登場する．

フェルミオンとボゾン

ボゾニック：成分がグラスマン偶 (H.G. Grassmann) な（**可換** $AB=BA$ である）量を「ボゾニック」と呼ぶ．ボゾンとは，粒子のうちで古典的な場がボゾニックな粒子のことである．すなわち場の成分同士が可換である場で記述される粒子である．

フェルミオニック：グラスマン奇な（**反可換** $AB=-BA$ である）量をフェルミオニックと呼ぶ．フェルミオンとは，古典的な場がフェルミオニック（反可換）な粒子のことである．

フェルミオンはギリシャ文字を使って書かれることが多い．例えば ψ, χ, η などである．ただし，ボゾンのスカラー場として使われる ϕ は例外である．

例えば，電磁気力や重力などの力を表すゲージ場はボゾンで，電子やクォークなどの物質を表すのはフェルミオンである．また，ヒッグス粒子 (P.W. Higgs) と呼ばれる粒子は物質であるが，例外的にボゾンのスカラー場である．

交換関係，反交換関係

交換関係と反交換関係を表す括弧を以下のように定義する．**交換関係**は $[A,B]\equiv AB-BA$ で定義し，**反交換関係**は $\{A,B\}\equiv AB+BA$ とする．

クロネッカーとディラックのデルタ

δ_{ij} をクロネッカー (L. Kronecker) のデルタ ($i=j$ で 1, $i\neq j$ で 0)，$\delta(x-y)$ をディラック (P.A.M. Dirac) のデルタ関数 $\int d^D x f(x)\delta(x-y)=f(y)$ として断りなく用いる．ここで D は次元を表す．つまり，デルタ関数は D 次元デルタ関数を略記して書かれている．本来は $\delta(x_1-y_1)\cdots\delta(x_D-y_D)$ と書くべきところを省略して書いているのである．また，$\varepsilon_{\mu\cdots\nu}$ は完全反対称テンソルを表しているものとする．

汎関数微分

場の理論の変分としてよく用いる汎関数微分は

$$\frac{\delta\phi_i(x)}{\delta\phi_j(y)}=\delta(x-y)\delta_{ij} \tag{1.5}$$

である．ここで i,j は場の種類を識別する添字であり，$\delta(x-y)$ は適当な次元のディラックのデルタ関数である．

作用

作用というと数学では「群が作用する」などと使われるが，物理ではラグランジアンの積分という意味で使われるので注意が必要だ．詳細は次節に登場する．

以上のように物理と数学では言葉の使い方に違いが多いので，それらには注意して以下の本文を読んでいただきたい．その他の習慣的な違いも，適宜本文中で述べる．また，物理の論文では誤解が生じない範囲で，正規化の定数や次元のべき乗など種々の記号が省略される場合が多い．慣れている研究者は気にならないのであるが，異分野の読者はそういったものを適時補うか，あまり気にしないで読む必要がある．

1.2 古典論

この節では古典物理として主にラグランジュ形式 (J. Lagrange) を紹介する．しかし実際に運動方程式を解くということはせず，後で用いる経路積分による量子化のときに使う最小限のことだけを見ることにする.「古典論」とは，作用（ラグランジアンの積分）を与えることで物理系が完全に決まる理論のことである．「物理系が完全に決まる」とは，作用から導かれる運動方程式と初期状態（境界条件）を与えることで，系の運動（例えば粒子の場合なら位置と速度）が完全に決定されることを意味する．したがって，古典論の世界観では時の終わりまで物質の運命が決まっている．それを修正し，運動の結果の確率のみが決定されるとしたのが後で出てくる「量子論」である．

1.2.1 粒子と弦の作用（あるいは作用積分）

ラグランジュ形式では，物理を決めるのは以下のように定義される作用積分である．初めに粒子（質点）の力学を考えてみよう．

粒子の力学の場合

l は時間を表す $\mathbb{R}$ の区間とし，τ は時刻（つまり l に付けられたパラメータ）で $\tau \in l$ とする．M をリーマン多様体 (B. Riemann) とし，特に我々の住む時空で考えると「ターゲット空間」とも呼ばれる．その上でのリーマン計量を $g_{\mu\nu}$ で表すことにする．粒子がある時間 l の間，ターゲット空間 M を運動する様子を物理法則としてとらえるのが目的である．粒子のターゲット空間 M を運動する様子は，M に埋め込まれた 1 次元の軌跡として表されるので，その全体を $\mathcal{F} := Map(l, M)$ とする．$\mathcal{F}$ の元として $x^\mu(\tau)$ を考えると，時刻 τ の粒子の位置を表していると解釈できる．

ここまでは，なんの条件もないので粒子がどのように運動するかは決まっていない．そこで物理法則を決めるラグランジアンと作用[5)]を導入する．粒子の運動を決めるラグランジアン L とは $Map(\mathcal{F}, \mathcal{C}^\infty(l))$ であるスカラー関数である．また，経験則から τ に関する局所性も要請するのが普通だ．つまり L が τ に関する場とその微分で記述されていることを要請する．

ラグランジアンを具体的に与えることで，現実の物理に一致するかどうかは別として，何か物理法則を与えたことになる．つまり，ラグランジアンを用いて作用を

$$S \equiv \int_l d\tau \; L(x^\mu(\tau)) \tag{1.6}$$

と定義すると，ラグランジュ形式の物理とは「この作用を最小にする（正確には停留点を与える）ように運動が決定される」という“原理”を採用することで物理法則を得る理論なのである．標語的に書くと以下のようになる．

最小作用の原理

「作用 S を与えると運動が決定する」

$\Longrightarrow$ 「S を最小とする x_μ の軌跡が決定される」

したがって，古典論の範囲では，「自然の法則を表すラグランジアンあるいは

---

5)作用という名前は非常にわかりにくい．「群の作用」などとは全く関係がないので注意されたし．しかし，物理の慣習として「作用」と呼ぶのでこの本でも用いる．

作用を発見する」ということが最も重要な目標となる．

より具体的に粒子の運動を決定するには微分方程式の形にするのが便利なので，次に作用が停留点となる条件からその方程式を得ることにする．その方程式は運動を決める方程式なので**運動方程式**（オイラー-ラグランジュ方程式 (L. Euler, J. Lagrange)）と呼ばれ，$\delta S=0$ すなわち

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial(dx^\mu/d\tau)}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^\mu}=0 \tag{1.7}$$

で得られる．L が x^μ の τ に関する 2 階以上の高階微分を含まないとした．式 (1.7) を得るには部分積分をして，全微分項は無限遠で 0 とみなして落とすことで得られる[6)]．例として，点粒子が一直線上をポテンシャル $V(x)$ によって力を受けて運動する様子を見ることにする．例えば，地球の重力下でビルの上からリンゴを真下に落とす様子などを想像するとよい．

例 1.1　点粒子（1 + 1 次元）（一様重力）

τ を時間と解釈し，簡単のため，一様な重力の場合のポテンシャル $V(x)=mgx$（m は質量，g は重力加速度）を考えることにする．

$$\begin{aligned}L&=(\text{運動エネルギー})-(\text{ポテンシャルエネルギー})\\&=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2-V(x)=\frac{1}{2}mv^2-mgx \qquad (1.8)\end{aligned}$$

$$S=\int L\,d\tau \tag{1.9}$$

を作用として採用することにする．運動方程式は $m\dfrac{d^2x}{d\tau^2}=\dfrac{\partial V}{\partial x}$ で得られる．したがって「ニュートンの運動方程式 (I. Newton)：質量×加速度 ＝ 力 ($F=mg=ma$)」が再現され，上の作用は現実の物理法則を再現する作用であったことがわかる．

ニュートンの運動方程式はローレンツ変換で不変ではないので，光速度に近い領域では不正確となる．（特殊）相対論に対応した粒子の理論を次の例としてみてみよう．

---

6) l が有限の場合は端点では変分 $\delta x=0$ として全微分項は落とす．

例 1.2　相対論的粒子 1

作用 S は「粒子の軌跡（世界線）の長さ」で与えればよく，次のようになる．

$$S=-m\int d\tau\sqrt{\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx_{\mu}}{d\tau}} \tag{1.10}$$

この作用から得られる運動方程式は，

$$\frac{d}{d\tau}\left(m\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\cdot\sqrt{\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx_{\mu}}{d\tau}}^{\,-1}\right)=0 \tag{1.11}$$

である．これは相対論的粒子の運動を記述する方程式になっている．ここで，作用と記述される物理系は 1 対 1 に対応しているわけではないことを指摘しよう．同じ運動を表す作用の選び方は 1 通りではない．このことを見るために，同じ運動を表すもう一つの作用を次に与えよう．

例 1.3　相対論的粒子 2

(1.11) と同じ運動方程式を与える作用は補助変数 e を導入して (e も x^{μ} と同様な独立な力学変数とみなしている）以下のように得られる．

$$S=\int d\tau\left(\frac{1}{2e}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx_{\mu}}{d\tau}+\frac{m^2}{2}e\right) \tag{1.12}$$

このとき，運動方程式は x と e についてそれぞれ

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^{\mu}}{d\tau}e^{-1}\right)=0 \tag{1.13}$$

$$\frac{1}{e^2}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx_{\mu}}{d\tau}-m^2=0 \tag{1.14}$$

と与えられる．この方程式から e を消去すると (1.11) と同じものが得られることが確かめられる．

特殊相対性理論について補足

(1.14) は特殊相対性理論の重要公式を与えているので若干補足することにする．

正準運動量（正準共役量）を，以下のように粒子の軌跡が作る多様体上の座標で微分した $(dx_{\mu}/d\tau)$ でラグランジアンを微分した

$$p^\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial(dx_\mu/d\tau)} = \frac{1}{e}\frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{1.15}$$

で定義する[7]．M として 4 次元ミンコフスキー時空を考えるなら μ は $0,1,2,3$ を走る添字で，その番号を付けられた方向に対する 4 次元の運動量が p^μ である．この正準運動量を用いて (1.14) を書き直すと

$$p^2 - m^2 = 0 \tag{1.16}$$

が得られる[8]．特殊相対論における最も重要な公式の一つで，以後断りなくこの式を使うので，是非覚えるなり印をつけるなりしておいてほしい．

ミンコフスキー空間の計量を対角な $(1,-1,-1,-1)$ とすると，空間方向的には粒子が止まっている静止系 ($p^i = 0$, $i = 1,2,3$) にたまたま自分がいたと考えるならば，第 0 成分がエネルギーに対応する．このとき，$p^0 = E/c$ と書くことにすると，有名な式

$$E = mc^2 \tag{1.17}$$

となる．ただし c は光速である．今まで自然単位系を用いて 1 としていたが，ここでは有名な (1.17) を出すためにわざわざあらわに書いて m^2 を m^2c^2 と直した．

次に，例として弦が空間を運動する様子を記述する作用を与える．

弦理論の作用

弦理論は 1 次元の物体（紐）の運動を記述する理論で，紐の軌跡（世界面と呼ばれる）は 2 次元面をターゲット空間 M 内に作る．2 次元の矩形領域を $\mathbf{W}$ とし，それをパラメトライズする座標 $(\tau,\sigma) \in \mathbf{W}$ を導入する．先述の粒子のときの軌跡を表す線分 "l" を面 "$\mathbf{W}$" に置き換えることで，紐の運動を表す理論が得られる．

---

[7] 粒子の場合は正準運動量が並進対称性の生成作用素としての運動量に一致するが，後で場の理論に行くと正準共役量が運動量ではないことに注意する必要がある．

[8] ここでは多くの教科書にしたがってミンコフスキー空間の計量を $\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ とした．最初に書いたように超対称理論を扱うときは $\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ を用いる．その場合は (1.16) は $p^2 + m^2 = 0$ となるので，相対的な符号に注意する必要がある．

リーマン多様体 M をターゲット空間とすると，弦の位置を表す X_μ によって世界面の埋め込み $X_\mu(\tau,\sigma):\mathbf{W}\to M$ を与えることが，粒子のときの線分の埋め込みに対応している．ラグランジアン L は X_μ で構成されるあるスカラー関数で，作用は $S\equiv\int_{\mathbf{W}}L(X_\mu)$ と書ける．後は粒子の場合と同様に，適当な作用を与えると古典的な理論が決定する．相対論的な弦の運動を記述する運動方程式を与える作用も，粒子の場合と同様に一通りではない．まず南部-後藤の作用から見ることにしよう．

例 1.4　弦の作用（南部-後藤作用）

「点粒子の作用」は**「粒子の軌跡（世界線）の長さ」**で与えられたのだから，これを 2 次元の世界面に拡張すると**「弦の作用」＝「弦の軌跡（世界面）の面積」**で与えられることが理解できるであろう．式で書くと

$$
\begin{aligned}
S&=\frac{1}{4\pi\alpha}\int_{\mathbf{W}}d\tau d\sigma\sqrt{\left(\frac{dX^\mu}{d\tau}\,\frac{dX_\nu}{d\sigma}-\frac{dX^\mu}{d\sigma}\,\frac{dX_\nu}{d\tau}\right)^2}\\
&=\int d^2\sigma\sqrt{\det(\partial_a X_\mu\partial_b X^\mu)}
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

となる．ただし a,b は世界面の座標 τ,σ を走る添字とし，2 行目の根号の中はその 2×2 行列についての行列式をとっている．α は定数である．南部-後藤の作用は平方根が入っていて扱いにくいから，しばしば別の作用が用いられる．先ほどの点粒子の場合のように，別の作用を使って実際に書いてみる．

例 1.5　弦の作用（ポリャコフ (A. Polyakov) 作用）

補助場としてリーマン面（世界面）上の計量 g_{ab} を導入する．

$$
S=\frac{1}{4\pi\alpha}\int d^2\sigma\sqrt{g}g^{ab}\partial_a X_\mu\partial_b X^\mu \tag{1.19}
$$

ただし $g=\det g_{ab}$ とした．

確認のため，運動方程式を用いると二つの作用が同等であることを見てみよう．g_{ab} の運動方程式は

$$
\partial_a X_\mu\partial_b X^\mu=\frac{1}{2}g_{ab}g^{cd}\partial_c X_\mu\partial_d X^\mu \tag{1.20}
$$

である．これの (a,b) の足について行列式をとると，左辺が南部-後藤作用，右辺がポリャコフ作用になっている．よって運動方程式で物理系が完全に決定される古典理論の範囲では，二つの弦理論の作用が同等であることがわかった．

注意　ここで先走って，量子論を考えた場合について注意しておく．繰り返しになるが，古典理論は運動方程式のみで決定される理論であるが，量子論は古典理論で決定された運動に量子補正が加わり，古典的には起こりえないことが起こる．例えば量子効果による物理系の対称性の破れ（これをアノマリーと呼ぶ）が引き起こされ，一般には古典論では等しくても量子論としては等しくない理論が存在する．今の場合も空間の次元が 26 次元（超対称性を考えると 10 次元）の場合のときのみ，南部-後藤の作用による理論とポリャコフの作用による理論が一致する．この整合性が，弦理論が特定の次元でしか成立しない原因の一つである．

1.3　粒子と弦の量子論

古典論は物体の位置や速度が正確に予言できたが，量子論はそれらの確率的な**期待値**のみが決定される．それは波動関数という波のノルムを計算することで得られる．

1.3.1　正準量子化

力学変数 X^μ およびその微分を独立変数として運動が記述されているラグランジュ形式の古典理論が存在するとする．例えば，古典論のときの粒子の理論（小文字 x はここでは大文字 X に対応）や弦理論のような理論を考え，時間に対応する座標を τ とする．与えられたラグランジアンに対し，**正準運動量** P^μ を $P^\mu \equiv \dfrac{\partial L}{\partial(\partial_\tau X_\mu)}$ で定義する．正準運動量 P と力学変数 X で次のようにハミルトニアンを定義する[9]．

---

[9] 座標の時間微分 $\partial_\tau X_\mu$ が残っていると正しくはハミルトニアンとは呼ばない．正準運動量の定義を用いて，$\partial_\tau X_\mu$ を正準運動量 P と力学変数 X で表して，独立変数として P と X だけで表したものをハミルトニアンと呼ぶ．

$$H = P^\mu \partial_\tau X_\mu - L \tag{1.21}$$

ハミルトニアンは馴染みの深い言葉で言い換えるならエネルギーである．

次に**不確定性関係**を導入することで「量子化」を行う．古典理論では X はターゲット空間の座標などを表し，P はその粒子の正準運動量を表していた．素粒子理論のように極微の世界では，座標を測ることが運動量を変えてしまい，運動量の測定値が，位置を先に測定したか後で測定するかによってズレが生じてしまう．例えば光を当てて位置を特定しようとすると，光の運動量が粒子の運動量を変えてしまう．

X は位置の測定という作用素を表すものと思い，P は運動量を測定する作用素と考え，それを数式で表すと

$$[X^\mu, P^\nu] = X^\mu P^\nu - P^\nu X^\mu = i\delta^{\mu\nu} \tag{1.22}$$

である．右辺が運動量と位置の測定順序をかえることで生じるズレであり，普通はプランク定数 h を用いて表すが，今は自然単位系をとっているので 1 とした．こうして交換関係を設定し作用素を導入することが「量子化」と呼ばれる．

粒子の運動量に関してもう少し考えてみよう（ここでの議論は，場の理論では解釈の変更があるので注意が必要だ．場の理論では正準共役量が運動量ではないからだ．詳しいことはネーター (E. Noether) の定理の 1.5.1 節を参照）．位置の測定を表す作用素 X^μ を通常の座標のように扱うとすると，運動量を表す作用素として何を用いるとよいであろうか？　運動量 P^ν として $-i\partial_\nu$ とすると上の交換関係は満たされる（ただし $\partial_\nu = \dfrac{\partial}{\partial X^\nu}$ とした）．このことから，運動量 P^ν は空間座標 X^ν を並進する演算子と理解してよいことがわかる．

高校の物理で習ったように，運動量は保存量で物理系が時間発展しても変化しない量である．保存量は対称性と密接に関係していて，物理系が空間並進不変な対称性を持つことから運動量が定義される．同様な保存量としてエネルギーが存在するが，エネルギーは時間の並進不変性から定義される．したがって時間 τ に対してはハミルトニアンは量子化されて，$i\partial_\tau$ と演算子で書かれる．このことは場の理論の場合に，ネーターの定理を解説する際，もう一度論じられる．運動量と空間座標両方が演算子（作用素）で表されているので，ハミルトニアンも演算

子になっている．したがってハミルトニアンはエネルギーそのものではなくエネルギーを測定するという作用を表し，ハミルトニアンの固有値がエネルギー E と考える．

ここで量子化についてまとめておく．

古典論：X^μ は粒子の位置座標
　　　　P^ν は粒子の運動量
量子論：X^μ は粒子の位置を測定する作用
　　　　P^ν は粒子の運動量を測定する作用

位置を知るには光などを当てて観測しないといけないので，運動量が変化する．つまり物理現象は観測と切り離せない以上，運動量と位置の作用素（演算子）は厳密には可換にはなりえないのである．

したがって「**X^μ と P^μ を非可換とする**」＝**量子化**が必要になる．

注意　この不確定性関係を要求することが正準量子化と呼ばれる量子化である．しかし局所的な対称性があると正準運動量がそのままでは定義できないこともあり,「ゲージ固定」が必要になる．この点は後で解説するので今は目をつぶってすすむことにする．

作用素に適当な表現を与えたときの被作用子（作用を受ける対象）として与えられるヒルベルト空間 (D. Hilbert) の規格化されたベクトルは「**状態**」と呼ばれ，作用素の固有値が観測値，状態のノルムが期待値を表す．

例えば状態を $|\psi\rangle$ で書くと，粒子の位置の期待値は

$$\langle x\rangle \equiv \langle\psi|x|\psi\rangle = \int \psi^* x \psi d^3x \tag{1.23}$$

で表される．確率密度が $\psi^*\psi$ であると定義することで，粒子の位置の平均値を積分で求めるという式になっているのである（状態を $\int \psi^*\psi d^3x$ で規格化した関数で表した）．

次に，状態がどう変化するかを物理法則で決定する．古典論と対応させるためには，演算子が満たすべき関係は古典理論と同じと考えればよい．その作用素の

関係式に対して，状態の満たすべき方程式が決まる．状態が満たすべき式も，古典論のときと同様に運動方程式と呼ぶことにする．非相対論的運動を記述する（状態に対する）運動方程式はシュレーディンガー方程式 (E. Schrödinger) と呼ばれ，

$$i\partial_\tau|\psi\rangle = H(p,x)\ |\psi\rangle \tag{1.24}$$

で与えられる．これは古典的な運動量とエネルギーの関係式を，運動量演算子とエネルギー演算子であるハミルトニアンに置き換えて，その関係を満たす状態を定義するという方程式になっている．

運動方程式は，波の方程式であるために波動方程式と呼ばれ，それを満たす状態を関数で表したものを「波動関数」と呼ぶ．例えば非相対論的シュレーディンガー方程式は，波動関数 ψ に対して以下で与えられる．

$$i\partial_\tau\psi(\tau,x) = H\psi(\tau,x) \tag{1.25}$$

ハミルトニアンは波動関数の時間発展演算子であることが左辺の意味である．念のため，具体例でシュレーディンガー方程式を見てみよう．

例 1.6　点粒子のシュレーディンガー方程式

点粒子についてラグランジアン (1.8) からハミルトニアン (1.21) を求めると，次のようになる．

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}p^2 + V(x) \\ &= (\text{運動エネルギー}) + (\text{ポテンシャルエネルギー}) \end{aligned} \tag{1.26}$$

ただし，$p = m\partial_\tau x$ とした．ここでハミルトニアンは，固有値がエネルギーを表す演算子であると考え，シュレーディンガー方程式（1.25）を構成すると，

$$i\partial_\tau\psi(\tau,x) = \left(\frac{1}{2m}p^2 + V(x)\right)\psi(\tau,x) \tag{1.27}$$

となる．

上の例は“非”相対論的粒子の場合で「シュレーディンガー」方程式と呼ばれ

ていたが，相対論的粒子の波動方程式（運動方程式）は「クライン-ゴルドン方程式 (O. Klein, W. Gordon)」と呼ばれる．

例 1.7　相対論的粒子の波動方程式（クライン-ゴルドン方程式）

相対論的粒子の量子化された方程式は，シュレーディンガー方程式と同様に，(1.16) の運動量とエネルギーを微分演算子に置き換えることで得られ

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi = 0 \tag{1.28}$$

と書かれる．ただし ϕ は相対論的粒子の状態を表す波動関数（あるいはヒルベルト空間のベクトル）を表しているものと考えて間違いではない.「間違いではない」と書いたのは，正しくは正値性を満たすノルムが定義できない解を手で落とすなどの人為的作業をしなければいけないという問題があるからだ．しかしこの問題は場の理論にすすめば解決されるので触れない．

次の例は非常に大切である．

例 1.8　調和振動子

バネについた粒子などの運動が調和振動子である．場の理論は摂動的には全てこの調和振動子の問題として扱うことができ，場の量子論の理解のための最も基本的な系であることから非常に重要である．

(1.8) で与えたラグランジアンのポテンシャルが $V(x) = kx^2$ の場合を考えよう[10]．このときハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + kx^2 \tag{1.29}$$

である．以下，簡単のため $m=1, k=1/2$ とする．ここで**「生成演算子 $a^\dagger$ と消**

---

[10] バネにかかる力がバネの伸び x に比例しているとき，力は $-kx$ で表される．k はバネ定数と呼ばれる比例定数で，マイナス記号は伸びる方向の逆向きに力が働くことを意味する．ポテンシャルエネルギーはその反作用の力と位置の変化 dx の積の積分 $\int dx\{-(-kx)\} = kx^2/2$ で与えられる．$k/2$ を改めて k と置きなおすことで，この例がバネの問題であることが理解されるだろう．

滅演算子 a」を導入する．

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x+ip), \qquad a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x-ip) \tag{1.30}$$

これら生成消滅演算子を用いると，正準交換関係 $[x,p]=i$ は以下のように書き換わる．

$$[a,a^\dagger]=1, \qquad [a,a]=[a^\dagger,a^\dagger]=0 \tag{1.31}$$

後の節で，場の理論や非可換空間でも生成演算子と消滅演算子を頻繁に用いるが，そこではむしろこの交換関係 (1.31) を満たすものとしてそれらを定義する．この節の以下の計算は全てこの交換関係で計算される．

個数演算子と呼ばれる演算子を $N=a^\dagger a$ とするとハミルトニアンは

$$H=a^\dagger a+\frac{1}{2}=N+\frac{1}{2} \tag{1.32}$$

となる．ここで，N の固有状態を $|n\rangle$ とする（つまり，$N|n\rangle=n|n\rangle$）．このとき $[a,a^\dagger]=1$ より

$$a^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle \tag{1.33}$$

$$a|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle \tag{1.34}$$

となることがわかる．これが生成（消滅）と呼ばれる所以である．ただし規格化条件 $\langle n|m\rangle=\delta_{nm}$ により係数を決めている．$a^\dagger|n\rangle$ の個数演算子の固有値が 1 だけ増えていることを確かめてみよう．

$$Na^\dagger|n\rangle=a^\dagger aa^\dagger|n\rangle=a^\dagger a^\dagger a|n\rangle+a^\dagger[a,a^\dagger]|n\rangle=(n+1)a^\dagger|n\rangle \tag{1.35}$$

$a|n\rangle$ が個数演算子の $n-1$ の固有状態であることも同様に確認できる．

ハミルトニアン（エネルギー）は正定値であることに対応して，定義からも明らかなように N の固有状態には下限があり，それを $|0\rangle$ とする（つまり $a|0\rangle=0$）．この $|0\rangle$ を用いて個数演算子 N の固有状態は次のように作ることができる．

$$|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}{a^\dagger}^n|0\rangle \tag{1.36}$$

これは完全系を張る．この式は $|n\rangle$ が真空に n 回生成演算子を掛けたものに対

応することを示す．つまり「個数演算子」は，真空に「何回生成演算子を掛けたか」を数える演算子であり，場の理論ではそれが本当に粒子の「個数」を表すので「個数演算子」という名前になっている．

エネルギー固有値は (1.32) の固有値であるから

$$E_n = n + \frac{1}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{1.37}$$

である．量子論ではエネルギーがこのように連続でない値をとることがある（このように不連続になることは，不確定性関係を要請し量子化した結果であるから，こうした現象自体も「量子化された」と呼ぶ）．

次の例は点粒子ではなく弦の場合である．ただし，弦の場合はゲージ対称性が存在するためにゲージ固定という手続きをしなくてはならない．しかし，ゲージ固定に関しては後で解説するので，ここではごまかしておくことにする．

例 1.9　開いた弦理論

弦のラグランジアン (1.19) から正準運動量が $P^\mu = \partial_\tau X^\mu / 2\pi\alpha$ であることがわかる．弦の端の境界条件として，ノイマン境界条件 (J. Neumann)（自由端）$\partial_\sigma X_\mu(\tau, \sigma)|_{\sigma=0,\pi} = 0$ をここでは選ぶことにする．フーリエ展開 (J. Fourie) をすると，

$$X^\mu = x^\mu + 2\alpha p^\mu \tau + i \sum_{n \neq 0} \frac{\sqrt{2\alpha}}{n} \alpha_n^\mu \cos(n\sigma) e^{-n\tau} \tag{1.38}$$

となる．ただし x_μ は重心 $\int d\sigma X^\mu / \pi$, p^μ は重心運動量 $\int d\sigma P^\mu$ を表している．つまり，重心の運動と弦の振動に分離して書いたのが上の式である．これを量子化するために正準交換関係 $[X^\mu, P^\nu] = i\delta^{\mu\nu}$ を要請する．

フーリエモード α_n^μ を使ってこの交換関係を書くと

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = m\delta_{n+m,0}\delta^{\mu\nu} \tag{1.39}$$

となる．ここで

$$a_n^{\mu\dagger} = \frac{1}{\sqrt{n}} \alpha_{-n}^\mu, \qquad a_n^\mu = \frac{1}{\sqrt{n}} \alpha_n^\mu \qquad (n > 0) \tag{1.40}$$

と変数変換すると，先ほどの調和振動子と同じ交換関係が添字 n の数だけ無限個得られる．つまり弦は，n でラベルされた無限種類の調和振動子の集まりであると考えられる．定義からハミルトニアンを求め，重心運動量が 0 となる静止エネルギーを出すと

$$E^2 = \frac{1}{\alpha}\left(\sum_{n>0} n a_n^{\mu\dagger} a_n^{\mu} - 1\right) \tag{1.41}$$

で得られる[11]．第一項はラベル n を掛けた個数演算子 $N_n = n a_n^{\mu\dagger} a_n^{\mu}$ である．(1.16) または (1.17) の質量とエネルギーの関係を思い出すと，静止エネルギーは（質量× c^2）で，光速は今 $c=1$ であるから，n の添字を持つ振動モードの質量は

$$質量 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{N_n - 1}$$

ということになる．

ここで，弦を遠くから見て点粒子とみなしたときを考えてみよう．そのときは，「$N_n=1$ は質量のないターゲット空間のベクトル（接ベクトル束に値を持つ）の粒子」であることがわかる（ターゲット空間のベクトルは添字「$^{\mu}$」がつくことに注意）．調和振動子の場合に見たように，真空 $|0\rangle$ に生成演算子 $a^\dagger$ を演算すると，不連続な「個数」で識別されるエネルギーの状態が生成されるのであるから，1 回演算した状態は 1 粒子を表す状態である．特に今の場合は $a_1^{\mu\dagger}$ を演算しているので，$a_1^{\mu\dagger}|0\rangle$ は「時空のベクトル場でかつ質量のない粒子」である．そして，そのような粒子はゲージ場（ゲージ理論における接続）であることが知られている．

$$a_1^{\mu\dagger}|0\rangle = \text{「ゲージ粒子」}$$

---

[11] この静止エネルギーを求めるには計算のギャップがあるので，計算を行っている読者は注意されたし．局所的対称性（ゲージ対称性）が存在するためゲージ固定が適当に選んである．また，ゼロ点エネルギーをローレンツ不変性から決定する議論をし時空を 26 次元にしなければ (1.41) 式は導出されない．また (1.41) 式は μ について和をとっているが，和は時空の次元の数から 2 だけ小さい数（力学的自由度）までとる．したがって今の場合 $\mu = 1 \sim 24$ となる．詳しくは [4] などを参照．

もう少し詳しく述べると，接続 A_μ を場の量子化をして粒子とみなした状態がこの状態である．ゲージ場に質量がないのは，ゲージ理論の作用はゲージ対称性を持つためだ．質量とは作用の中で微分を含まない 2 次の項の係数である．ゲージ場が仮に質量を持つなら，作用に質量項 $m\mathrm{tr}A_\mu A^\mu$ があるはずだが，これは 1.4 節で登場するゲージ変換で不変ではない．したがってゲージ場に質量はない．もちろん質量がないだけでゲージ粒子であると断定することはできないが，ここでは触れない他の議論からも $a_1^\mu|0\rangle$ がゲージ粒子であることがわかる．ここでは，場の理論も場の量子論もまだ議論していないので理解が難しいと思われるので，1.4 節と 1.5 節を学習した後に戻られるといい．

(1.17) より質量はエネルギーと等価なので，質量 0 のものだけ見ることは，低エネルギーだけを見ることに相当する．質量が 0 の粒子を調べることは，弦理論が低エネルギーでどのような粒子の理論と対応するかを調べることである．これが弦理論が低エネルギーでゲージ理論になる様子を見る方法である．

同様のことを閉じた弦（周期境界条件）で実行すると，

「質量のない 2 階のテンソルの粒子」＝「重力子」

が現れる（重力子は，重力を表す粒子である）．

こうして弦理論は全てのゲージ粒子（全ての力）を含む理論であることがわかり，統一理論の候補となった．粒子の持つ対称性を調べることからも，正しくゲージ対称性が再現されていることが確かめられている．

また詳しく議論はしないが，くりこみ理論とアノマリーという場の量子論による計算を実行しても，弦理論の低エネルギー理論には重力を含むゲージ理論が現れなければならないことがわかる．ゲージ場の理論で表される「双対性（デュアリティー）」などの様々な現象が弦理論を用いて説明されるのは，このような事情による．

弦理論とそのソリトン的物体である D-ブレーンを材料として図画工作で行うように自由に切り貼りすることで，ゲージ場の理論だけを扱っていたのでは到底考えられないような理論同士の関係を，次々と予想していくのが 90 年代後半以降の物理学者の手口であった．以下の節では，場の理論に焦点を当てることにする．

1.4　場の古典論（量子化していない場の理論）

この節では量子化していない場の理論を勉強する．

実は弦理論は 2 次元の場の理論とも考えられる．というのは，弦理論の 2 次元面は我々の住む世界（ターゲット空間）に埋め込まれたリーマン面の理論である．2 次元面上の埋め込みを決めている写像は，2 次元面がベース空間であるファイバー束の切断と理解することができるので，2 次元時空上の場の理論でもあるわけである．しかし重力場や電磁場のように，我々が住む時空そのものの上のベクトル束としての場を考えたい．我々の住む空間上の各点に，電磁場のような $U(1)$ ゲージ場や重力場のようなレビ-チビタ接続場 (T. Levi-Civita) を定義するのである．さらには物質も粒子として扱うのではなく，場（物質場）と思い直し，全てを場で書き表すことがこの節の目的である．

物質場（スカラー場，スピノル場）の理論

理論を構成する場の組を $\{\phi_i(x)\}$ とし，D 次元時空のラグランジアンあるいは作用 S を理論の満たすべき対称性を保存するように作る．

$$S = \int d^D x L(\phi_i, \partial_\mu \phi_j) \tag{1.42}$$

相対論の要請から，ローレンツ変換 $SO(D-1,1)$（ユークリッド計量で考えるときは $SO(D)$）のもと不変という対称性を課す（一般相対論のように曲がった時空上で考える場合，局所ローレンツ変換不変あるいは一般座標変換不変を要請して議論する必要がある）．したがって，物理的に相対論と矛盾なく定式できる場とはローレンツ群の表現で表されるものであり，そうして得られるものは表現行列の小さなものから順に「スカラー場」「スピノル場」「ベクトル場」等である[12)]．

場の理論の運動方程式 も汎関数微分を用いた作用の変分 $\dfrac{\delta S}{\delta \phi_i} = 0$ で求まり，ラグランジアンを用いてオイラー-ラグランジュ方程式として書くと

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i(x))} - \frac{\partial L}{\partial \phi_i(x)} = 0 \tag{1.43}$$

[12)] 4 次元以下の次元ではこの順番だが，高次元ではスピノル場の表現がベクトル場より大きくなる．

となる．物質場は，相対論的関係式（1.16）（あるいはハミルトンヤコビ方程式 (W.R. Hamilton, C. Jacobi)）を運動方程式として得られるようにラグランジアンや作用を作ることにする．まず初めに一番簡単なスカラー場の例を見ることにしよう．

例 1.10　相互作用のないスカラー場

リーマン多様体（我々の住む世界）を M として，複素スカラー関数 $M\to\mathbb{C}$ を ϕ で表すことにする．作用 $C^\infty(M)\to\mathbb{C}$ を

$$S=\int_M d^D x\,(\partial^\mu\bar{\phi}\partial_\mu\phi-m^2\bar{\phi}\phi) \tag{1.44}$$

で定義する．ただし $\bar{\phi}$ は ϕ の複素共役を表しているとする．そうすると $\bar{\phi}$ の変分で得られる運動方程式は，$(\Box+m^2)\phi=0$ で正しく自由な（相互作用のない）波動方程式であるクライン-ゴルドン方程式（1.28）を再現する作用であることがわかる．ただし $\Box=\partial^\mu\partial_\mu$ としている．

歴史的な経緯をふまえて付け加えると，ここでの ϕ は波動関数に相当するものである．したがって粒子の状態をあらわすという意味では，この波動方程式はすでに量子力学をとりこんだものであるが，それを古典的な場と考え直す．なぜそのようなことを考えるかというと，単に波動関数として扱うと 1 個の相対論的粒子の量子力学にはなっているが，真空から粒子が生成したり消滅したりするメカニズムや多粒子の状態を，一つの場で扱うことができないからである．

しかし，この波動関数を古典的な場とみなすことでさらに量子化することが可能になる．前節で見たような生成消滅演算子を導入すると，まさにスカラー場で記述される粒子が生成したり消滅したりして自由に個数が変化する状況を表現することが可能になる．したがって，このように「場の理論を量子化」することを「第二量子化」とも呼ぶことがある．ただし (1.28) のところで触れたように，実際には量子化された場の理論で初めて負ノルムの問題が解決され，量子化する前の波動関数の理論を考える意味があまりないので最近は単に「場の量子化」と呼ぶことの方が多い．

上の作用のように，質量 m は微分を含まない場の 2 次の係数として表される．質量を表す 2 次の項を「質量項」，2 次の項の内微分を含む項を「運動項」と呼

ぶ．例えば (1.44) のラグランジアンの中では $\partial^\mu \bar{\phi} \partial_\mu \phi$ が運動項で $-m^2 \bar{\phi} \phi$ が質量項である．

次に，スピン群の表現として，ローレンツ群 $SO(3,1)$（あるいはユークリッド計量の場合なら回転群 $SO(4)$）の表現になっているスピノルについて考える．二重被覆であることは無視して，$SO(3,1) \simeq SL(2,\mathbb{C})(SO(4) \simeq SU(2) \times SU(2))$ であるので，ローレンツ群の表現として $SL(2,\mathbb{C})$ の表現（$SO(4)$ の表現として $SU(2) \times SU(2)$ の表現）を用いることができるのである．$SL(2,\mathbb{C})$ や $SU(2) \times SU(2)$ が 4 次元の場合のスピン群である．現実に存在するスピノルの場は，電子などの物質の場である．

高校の物理や化学でも学んだ通り，原子における電子の軌道に有限個の電子しか入らないため，原子には周期律表が存在していた．これは，同じ状態には 2 個以上の電子が存在できないということ（排他原理）を意味する．このような場を作るにはグラスマン奇，すなわちフェルミオニックな量でなければならない．以下では，そのような場（フェルミオン）について考察する．

例 1.11　フェルミオン，スピノル場（ミンコフスキー空間）

ここでは簡単のため，4 次元の場合に限り大雑把に説明することにする[13]．さらに詳しく学びたい方は参考文献（ [13] など）を参照されたし．また，スピノルに不慣れな読者は多少わからなくてもここでは適当に読み流すほうがいいかもしれない．というのは，超対称性のところでいろいろ計算するので，そこで理解することができるかもしれないからだ．

ここでクリフォード代数 (W. Clifford) を具体的に得るために，パウリ (W. Pauli) 行列を以下のように導入する．

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.45}$$

[13] 大雑把というのは，スピノルの添字のつけ方や共役などの定義をきちんとやらないということで，詳しくは超対称性の節と参考文献に任せることにする．それらをきちんとやるのは面倒であるが，それを知らなくても正確な計算はともかく当面の議論の理解にさほど必要ではなく，むしろ技術的な問題だからである．超対称性のところ（1.7 節）では添字の付け方等についてまとめた．

上のパウリ行列は，4 次元ベクトルを

$$((\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}) \equiv (\mathbf{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \qquad ((\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta}) \equiv (\mathbf{1}, -\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3)$$

としてとると[14)]

$$\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu = 2\eta_{\mu\nu}\mathbf{1} \tag{1.46}$$

となるように選ばれている．ただし，$\mathbf{1}$ は単位行列である．つまりクリフォード代数を導入した（次に定義するガンマ行列の反交換関係も参照）．ただしここで η はミンコフスキー計量で対角成分が $(1,-1,-1,-1)$ であるものとした．

ψ を，グラスマン数 $(\psi_1\psi_2 = -\psi_2\psi_1)$ で，$SL(2,\mathbb{C})(\simeq SO(3,1))$ の 2 表現スピノル場とする．$SO(3,1)$ 不変な作用を作ると

$$S = \int_M d^4x \, (i\psi^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi + h.c.) \tag{1.47}$$

となる．ただし $h.c.$ は直前の項のエルミート共役としている（場の順番を変えるときはグラスマン奇であることから符号が出ることに注意する必要がある）．スピノルの足は $SL(2,\mathbb{C})$ の不変テンソルである反対称テンソルで縮約する．このように不変テンソルで縮約をとった量がローレンツ群のスカラーであることはそれほど自明ではないが，証明にはいろいろな公式が必要なのでここでは省略する．α と複素共役な変換をするものの足を $\dot{\alpha}$ と書いて区別し，それぞれ 1 と 2 を取ることができる．この共役な関係は粒子と反粒子に対応している．

スピノルの足のつけ方はいろいろな趣味があり，往々にして混乱の原因となる．[13] の足のつけ方が主流であるが，ここでは詳しく紹介しない．例えば今の場合，不変テンソルである完全反対称テンソル $\varepsilon_{\alpha\beta}$ とその逆行列 $\varepsilon^{\alpha\beta}$ で足の上げ下げや縮約を行うのであるが，上のラグランジアンはスピノルの足もあらわに書くと $\psi^\dagger_{\dot{\alpha}} \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sigma^\mu_{\dot{\beta}\alpha} \partial_\mu \psi_\beta \varepsilon^{\alpha\beta}$ となる．もちろんここでも同じ添字が出てきたら和をとっている．

---

14) 後の超対称理論ではミンコフスキー計量の取り方が異なるので，負号のつき方が異なることに注意．なおユークリッド計量の場合，すなわち $SO(4) \sim SU(2) \times SU(2)$ の場合は，$((\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}) \equiv (i\mathbf{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), ((\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta}) \equiv (i\mathbf{1}, -\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3)$ とすることで，クリフォード代数が $\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu = -2\delta_{\mu\nu}\mathbf{1}$ とするとよい．以下の議論はローレンツ計量を用いているが，これを元に適当に読み替えると，ユークリッド計量の場合にも全く同様である．

直観的には $(\sigma^\mu\partial_\mu)^2=\partial^\mu\partial_\mu$ であることから，運動項の $\sigma^\mu\partial_\mu$ スカラー場の場合のダランベルシアン $\Box=\partial^\mu\partial_\mu$ を因数分解したようなものだと考えるといい．この因数分解の考え方で最も自然に最初に導かれたのはディラックスピノルである．それらを含めいくつかのスピノルの種類をここで紹介する．

スピノルの種類

先ほど導入したパウリ行列の親戚で，4 次元の 4×4 行列の γ 行列（ガンマ行列）を導入する．

$$\gamma^\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \qquad \{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2\eta^{\mu\nu}$$

このガンマ行列の満たす代数をクリフォード代数と言う．これを用いると，やはり $(\gamma^\mu\partial_\mu)^2=\partial^\mu\partial_\mu$ であるから，$\gamma^\mu\partial_\mu$ が演算される 4 成分のスピノル場が存在していても特殊相対性理論と矛盾しないことがわかる．ここで出てきた $\gamma^\mu\partial_\mu$ は「ディラック作用素」と呼ばれ，しばしば $\gamma_\mu\partial^\mu$ を $\partial\!\!\!/$ と書く．ディラック作用素を演算される 4 成分のスピノルをディラックスピノルと呼ぶ．

ディラックスピノル

添字が α のものとその複素共役と同じ変換をする添字が $\dot{\alpha}$ のものを 2 階建てにし，全部で 4 成分のスピノル

$$\psi_D = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{1.48}$$

としたものがディラックスピノルである．ここでは ξ_α や $\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}$ を成分ではなく 2 成分のスピノル $(\xi_1,\xi_2)^t$ と $(\bar{\eta}^{\dot{1}},\bar{\eta}^{\dot{2}})^t$ の省略記号として書いてあるので注意されたし．適時，成分を表したり 2 成分スピノルを表したりしている．ディラックスピノルを用いてのラグランジアンが，例えば $\psi_D^\dagger\gamma_0\, D\!\!\!\!/\,\psi_D$ というもので与えられる．γ_0 が挟まるのは 4 成分の上 2 成分（点なしスピノル）と下 2 成分（点付スピノル）のローレンツ変換性を考えると必要になることが理解されよう[15]．

---

[15] ミンコフスキー計量でのスピノルでは，点付きと点なしが複素共役の関係にあるため，位置を入れかえる γ_0 が必要である．後で出てくるユークリッド計量では点付きと点なしが独立なので γ_0 は必要ない．

マヨラナスピノル (E. Majorana)

ディラックスピノルが荷電共役演算子（おおよそ複素共役であり，電荷を入れ替え粒子と反粒子の入れ替えを引き起こす演算子）

$$C := \begin{pmatrix} \varepsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix} \tag{1.49}$$

の変換のもと不変，つまり $\psi = C\psi^\dagger$ になるように制限したものがマヨラナスピノルである．一つのスピノルとその複素共役を用いて

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \eta^{*\beta}\varepsilon_{\beta\alpha} \\ \eta^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{1.50}$$

としたものをマヨラナスピノルという．これは 4 成分のディラックスピノルに，おおよそ「実」であるべしという条件をつけたものなので，自由度は 2 成分のスピノルである．

ディラックとマヨラナどちらに対しても作用は $\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi$ の形で与えることができる．ただし $\bar{\psi}$ はディラック共役 $\psi^\dagger\gamma_0$ を表すとしている．マヨラナスピノルには前に出てきた 2 成分表示の作用も書くことができる．この本では主に (1.47) のように 2 成分表示で書く．

ワイルスピノル (H. Weyl)

カイラリティー射影演算子を

$$\frac{1 \pm \gamma_5}{2}, \qquad \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \tag{1.51}$$

で導入する．γ_5 は，$\gamma_5^2 = 1$ であることから，固有値が ± 1 である．γ_5 の固有値が 1 の固有ベクトルとなるディラックスピノルを「右」と呼び $\psi_+ = (\xi_\alpha, 0)^t$ と書き，-1 のとき「左」と呼び $\psi_- = (0, \bar{\eta}^{\dot{\alpha}})^t$ と書いてそれらを「右（左）ワイルスピノル」と呼ぶ．

$$\frac{1 \pm \gamma_5}{2}\psi = \psi_\pm, \qquad \gamma_5\psi_\pm = \pm\psi_\pm$$

4 次元で考える場合には「マヨラナスピノル」と「ワイルスピノル」は 1 対 1 に対応するので，以下では特に区別されない場合が多い．

ユークリッド空間の場合のスピノル

これもいろいろ記法があるが，パウリ行列を $\sigma^{\mu}{}_{\alpha\dot{\alpha}}=(i\mathbf{1},\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ と $\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}=(i\mathbf{1},-\sigma_1,-\sigma_2,-\sigma_3)$ ととることで，あとはミンコフスキーの場合とパラレルに議論が可能である．$SL(2,\mathbb{C})\simeq SO(3,1)$ と $SU(2)\times SU(2)\simeq SO(4)$ の違いから，二つの $SU(2)$ の片方の表現を点付スピノルで，もう一方を点なしスピノルで書いた場合に，それらが独立であるという違いはある．

ゲージ場の理論

作用が多様体 M 上で定義された局所対称性を持つ系を考える．対称性はゲージ群 G のゲージ変換群 $\mathcal{G}$ に対して不変な理論を考えることにする．特にゲージ群が非アーベル群の場合はヤン-ミルズ理論 (C.N. Yang, R. Mills) と呼ばれる．主束の局所座標を (x,h) ; $x\in M,h\in G$ と書き，主束上の接続形式 (エーレスマン接続 (C. Ehresmann)) を局所切断による引き戻しでベース多様体上の $\mathfrak{g}\otimes\Omega^1$ に値を持つものとしたものの虚数単位 i 倍を，通常「ゲージ場 A」と呼ぶ (i 倍は付けないで反エルミートな場で書かれることもある)．あるいは水平部分空間に付随した接続を「ゲージ場」と呼ぶと言ってもよい．ただし $\mathfrak{g}$ はリー代数を表すとした．具体的には，ファイバーの座標が

$$h\longrightarrow h'=U(x)h\ ;\ U(x)\in\mathcal{G}$$

と変化した際に

$$A\longrightarrow A'=\frac{i}{g}UdU^{-1}+UAU^{-1} \tag{1.52}$$

と変換を受けるベクトル場であり，この変換をゲージ場のゲージ変換と呼ぶ．ゲージ場は接ベクトル束と同じ空間ベクトルなので添字を付けると A_μ であるが，空間ベクトルを表す添字 μ がない場合は微分形式で書かれているものとする．以下で，微分形式で記述する際にウェッジ積 $\wedge$ も省略することもある．g はゲージカップリングと呼ばれるパラメータで「相互作用」の強さを表す（相互作用については後で触れる）．

この接続 1 形式 A のゲージ変換を無限小変換 δ_g で書くと

$$\delta_g A=d_A\theta=d\theta-i\ g[A,\theta]\equiv D_\mu\theta dx^\mu \tag{1.53}$$

である．ここでリー代数 $\mathfrak{g}$ に値を持つゲージパラメータを θ とし，$U=e^{ig\theta}$ とした．D_μ は接続 A_μ の共変微分と呼ぶ[16)]．特に必要がないときは結合定数 g も 1 として省略する．

ゲージ曲率は

$$F=dA+iA\wedge A; \qquad F_{\mu\nu}=i[D_\mu,D_\nu] \tag{1.54}$$

で定義する．ゲージ曲率のゲージ変換は共変 $\delta_g F=-i[F,\theta]$ であるから，ゲージ変換の元で不変な作用は

$$S=\int_M \mathrm{tr}\ |F|^2=\int_M \mathrm{tr}\ F\wedge *F \tag{1.55}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_M \mathrm{tr}\ F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{1.56}$$

で与えられる．ただし，$*$ はホッジ (W.V.D. Hodge) 双対を，tr はゲージ群のトレースであるとした[17)]．

インスタントン

F は 2 形式なので，ユークリッド計量では $*^2F=F$ であることから，固有値が ± 1 の 2 種類に分けられる．つまり

$$F=F^+ +F^-, \qquad F^+:=(F+*F)/2, \qquad F^-:=(F-*F)/2$$

とすると，F^+ は自己双対，すなわち $*F^+=F^+$ であり，F^- は反自己双対，すなわち $*F^-=-F^-$ である．また，$F^+\wedge F^-=0$ である．上で与えた作用は

$$\int_M \mathrm{tr}\ F\wedge *F=\int_M \mathrm{tr}\ (|F^+|^2+|F^-|^2)\geq \pm\int_M \mathrm{tr}\ (|F^+|^2-|F^-|^2)$$
$$=\pm\int_M \mathrm{tr}\ F\wedge F$$

---

16) 共変微分はゲージ群の表現によって異なる．

17) キリング形式，すなわちリー代数の内積の定義は詳細を述べない．例えば $SU(2)$ の生成子を $T_i=\frac{1}{2}\sigma_i\,(i=1,2,3)$ とパウリ行列で構成すると $\mathrm{tr}T_iT_j=\frac{1}{2}\delta_{ij}$ となる．ミンコフスキー計量の場合，これで (1.56) の作用は符号が正しいが，ユークリッド計量の場合は逆になってしまう．本書ではどちらも扱うが，いちいち両方の場合について記述するのは無駄になるのでしない．符号の気になる読者は適切に選択あるいは再定義する必要がある．

となる．$\int_M \mathrm{tr}\, F\wedge F$ は第 1 ポントリャーギン類 (L. Pontryagin) に由来するトポロジカルな量で，インスタントン数とも呼ばれる．連続変形で変化しないので，非摂動的な効果を表す．摂動的なレベルでの変形では位相不変量により作用は下限を持つわけである．等号が成立するゲージ場の配位は

$$F^+=0 \quad \text{または} \quad F^-=0 \tag{1.57}$$

で与えられる．これらを満たす解 A_μ をそれぞれ反インスタントン（反自己双対接続）とインスタントン（自己双対接続）と呼ぶ．ただし以後は反インスタントンとは書かずに単にインスタントンと書くことにする．本書の主要なテーマはこのインスタントンにまつわるゲージ理論の非摂動的な配位やその量子効果，そこから導かれる幾何学的性質についてである[18)]．

スカラー場やスピノル場，ベクトル場なども同伴束の切断にするとゲージ場と相互作用を持つことができる．相互作用とは，運動方程式を求めたときに非線形になる項であり，ラグランジアンの中にある場の 3 次以上の項のことである．相互作用があると運動方程式の解に重ね合わせの原理が使えないことから，解同士が絡み合って散乱現象を引き起こす．後で何度か相互作用とは何かということに触れる．

ここで，重ね重ね強調しておくが，スカラー場，ベクトル場などの意味はあくまで時空 M の（余）接ベクトルについての 0 階，1 階のテンソルであることを意味するもので，ゲージ場と相互作用するとスカラー場と呼ばれていても多成分であることに注意してほしい．例えば随伴表現のスカラー場はゲージ群の微分であるリー代数に値をとるので，リー代数の生成子を $\{T^a\}$ で書くことにすると，$\phi=\phi^a T^a$ である．ここでも a については和をとっているが $\sum_a$ は省略されている．共変微分は接続 $A_\mu=A_\mu^a T^a$ を用いて，$D_\mu\phi=\partial_\mu\phi-ig[A_\mu,\phi]$ である．

一般に共変微分を「レビ-チビタ接続，スピン接続」についてのものから「レ

---

18) ミンコフスキー計量では $*^2=-1$ であるため，(反) 自己双対方程式は $*F=\mp iF$ となる．F はリー代数に値をとるので非コンパクトなゲージ群でなければこのような F は存在しない．本書では主にコンパクトなゲージ群を扱う．したがって，作用がミンコフスキー計量で記述される場合も，インスタントンについて計算する際は適当な再定義でユークリッド計量としていると了解されたし．

ビ-チビタ接続＋ゲージ接続 A, スピン接続＋ゲージ接続」に置き換えることで，ゲージ変換で不変な作用を与えることができる．例えば，左作用の基本表現のディラックスピノル（すなわちゲージ変換が $\psi'=U\psi$）の運動項 $\psi^\dagger\gamma_0\gamma^\mu D_\mu\psi$ に現れる微分作用素（ディラック作用素）は，ゲージ接続があるときはどのように変形されるとゲージ対称性を持つことができるであろうか．簡単のためスピン接続 ω_μ^{ij} がない場合を考えると，ゲージ場を用いて

$$\gamma^\mu\partial_\mu \longrightarrow \gamma^\mu(\partial_\mu - iA_\mu) \equiv \gamma^\mu D_\mu \tag{1.58}$$

と変形するとよい．ここでは結合定数 g は 1 として省略している（ただしこの共変微分 D_μ の定義は作用される表現に依存しており，ゲージ変換に対して共変になるように定義されている．そのため，表現行列が異なれば先ほどの随伴表現の場合とは明白に異なっていることに注意する必要がある）．こうすることで基本表現の共変微分 $\gamma^\mu D_\mu\psi$ もまた基本表現として共変に変換される．つまり $\gamma^\mu D'_\mu\psi' = U\gamma^\mu D_\mu\psi$ となる．

今の議論は特に「基本表現」である事実を使う必要はなかったので任意の表現行列の場合でも同じである．したがってラグランジアンの中のディラックスピノルの運動項 $\psi^\dagger\gamma_0\gamma^\mu D_\mu\psi$ はゲージ不変にすることができる．こうして微分を含む物質場の作用をゲージ対称性に対して不変にすることができ，一方でゲージ場との相互作用項 $i\psi^\dagger\gamma_0\gamma^\mu A_\mu\psi$ が自然に導入される．

ゲージ理論について豆知識

何の説明もなしにゲージ対称性を導入したが，物理的には力がゲージ場で，ゲージ対称性をもつフェルミオンはその力を受ける物質を表している．我々の世界を作る力は 4 つあり（重力，電磁気力，弱い核力，強い核力），それぞれ単に群の違うゲージ理論とみなすことができる．重力は局所ローレンツ群，電磁気は $U(1)$，強い核力は $SU(3)$ に対応する．また電磁気と弱い核力は $SU(2)\times U(1)$ のゲージ対称性が破れたものとして解釈される．ただし重力は作用にスカラー曲率が用いられるなどの他と異なる特徴がある．一方でフェルミオンは原子や電子を作る物質場を表している．

自発的対称性の破れ（特にヒッグス機構）

自発的対称性の破れは，後の章でたびたび用いられるので，そのための勉強をかねてここで学んでおくことにしよう．自発的対称性の破れはもっとも重要な概念の一つであるが，物理的概念であるために数学者等にとってはあまり馴染みがないと思われる．自発的対称性にはダイナミカルに破れる場合などバリエーションが存在するが，後で使われるのは「ヒッグス機構」と呼ばれるものだけなので，以下ではそれに限定する．

簡単のためにゲージ群を $SU(2)$ とする．随伴表現のスカラー場 ϕ を用いて次のような作用を考える．

$$S=\frac{1}{2}\int_M d^4x\,\mathrm{tr}\{-F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-\bar{\phi}D^\mu D_\mu\phi+[\bar{\phi},\phi]^2\} \tag{1.59}$$

ただし随伴表現のゲージ変換は，無限小ゲージ変換演算子 δ_g とリー代数 $su(2)$ に値をとるゲージ変換パラメータ $\theta(x)$ を用いて，ゲージ変換 $\delta_g\phi=ig[\theta,\phi]$ である．したがって，ヒッグス場の共変微分は $D_\mu\phi=\partial_\mu\phi-ig[A_\mu,\phi]$ で定義されている．

何度も繰り返しているが，注意しなければいけないのは,「スカラー」というのは時空の局所座標変換に対してスカラーなのであって，今のゲージ変換に対してはゲージ曲率同様に共変に振る舞う．例えばゲージ群が $SU(2)$ の場合，リー代数の基底として (1.45) に登場したパウリ行列 σ^i をとることができ，スカラー場 ϕ は $\phi=\sum_i\phi^i\sigma^i$ と 2 行 2 列の行列で書かれると理解できる．これはゲージ場や他の場も同様で，$A_\mu=\sum_i A_\mu^i\sigma^i$ を意味する．ただ，リー代数の基底を書くときは通常 T^i を用いるので，$SU(2)$ の場合はパウリ行列も $\sigma^i=T^i$ として書くことにする．

ゲージ場と相互作用するスカラー場のことを**ヒッグス粒子**と呼ぶ．ここで，tr $[\bar{\phi},\phi]^2$ はゲージ不変な相互作用（ポテンシャルエネルギーとも言える）を表す．今考えたい問題は「この系の真空はどのようなものがあるか？」ということである．ただし「真空」という言葉を「エネルギーが最小」となる場の配位で定義する．

今の場合は tr $[\bar{\phi},\phi]^2$ がポテンシャルエネルギーを与えていて 0 以上であるか

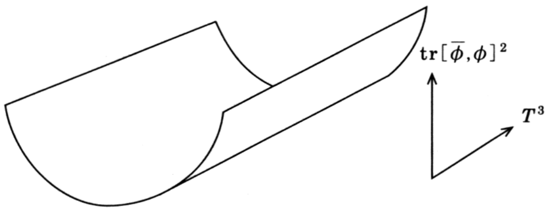


図 1.1　ヒッグス粒子のポテンシャル

ら，tr $[\bar{\phi},\phi]^2=0$ が真空を与える．

$\phi=\bar{\phi}=0$ は最小になるのでもちろん真空だが，他にも例えば一つのリー代数の基底 T^3 の方向に値をもつ $\phi_c=\langle\phi^3\rangle T^3\neq 0$ も tr $[\bar{\phi}_c,\phi_c]^2=0$ なので真空になっている．無限に伸びた 1 方向のどの点も真空になりうるのである（図 1.1 参照）．ここで $\langle\phi^3\rangle$ は真空を特徴付ける定数のパラメータである．

摂動的にある真空の周りで，力学変数である場がどのように振る舞うかを調べることで，その真空に近いエネルギーレベルの物理を考察することができる．したがって今考えている場の理論の作用を $\phi=\phi_c+\phi_q$ として真空 ϕ_c のまわりで展開することで，ϕ_q の摂動的な振る舞いをみることが必要になる．実際に $\phi_c=\langle\phi^3\rangle T^3$ を定数として，その周りで作用を展開すると

$$S=-\int_M F^{3\mu\nu}F^3_{\mu\nu}+\sum_{a=1,2}(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu)^2$$
$$+\bar{\phi}_q\partial^\mu\partial_\mu\phi_q+\sum_{a=1,2}g^2([A^a_\mu,\phi_c])^2+\cdots \tag{1.60}$$

が得られる．ここで，$F^3_{\mu\nu}$ は T^3 方向成分 A^3_μ だけで書かれる曲率である．T^1,T^2 方向のゲージ場は質量項（微分を含まない 2 次の項）tr $\sum_{a=1,2}g^2([A^a_\mu,\phi_c])^2$ を持つため，もはや作用は $SU(2)$ の作用に対して不変ではない．そして $\langle\phi_c\rangle$ がゲージ場の第 1，第 2 成分 A^1_μ,A^2_μ の質量（作用の中の微分を含まない場の 2 次の項の係数が質量．ϕ_c は真空を表す定数なので $[A^a_\mu,\phi_c]^2$ は場の 2 次と数えられる）になっているのである．エネルギーが最低となる真空の選び方によって，理論の持っていたゲージ対称性が壊れてしまうのである．この現象を**「自発的対称性の破れ」**と呼ぶ．今の例ではゲージ対称性が $SU(2)$ であったのが T^3 回転の $U(1)$

だけ残っている．

「自由粒子」と「相互作用」についての補足

「自由粒子」とは作用が2次のものしかない粒子をさす．例えば自由なスカラー粒子の場合のラグランジアンは

$$\bar{\phi}(\partial^\mu\partial_\mu+m^2)\phi \tag{1.61}$$

である．このラグランジアンの運動方程式(ϕで変分して得られる式)

$$(\partial^\mu\partial_\mu+m^2)\phi=0 \tag{1.62}$$

の解が$\exp\{i(Et+p\cdot x)\}$となる（ミンコフスキー空間で4次元空間の座標を(t,x_1,x_2,x_3)とし，相対論の重要公式$E^2=p_i^2+m^2$から解であることがすぐわかる）．これは質量$m=0$で光速（光速を1としていることに注意），$m\neq 0$では光速より遅い速度で平面波が伝わる（量子化して粒子だと思えば，粒子が慣性運動している）ことを意味するので,「自由粒子」である．また微分を含まない2次の項$m^2\bar{\phi}\phi$を質量項と呼ぶのもこれで理解されるであろう．質量mがあると光速よりも速度が遅くなるのである．

それに対して，$[\bar{\phi},\phi]^2$のような2次では書けない項は，自由な運動からのズレとして摂動的に取り扱われ，そのため相互作用と呼ばれる．上の運動方程式は波動方程式であり線型方程式だが，相互作用項が入ると非線形方程式になることから散乱現象がおこるというわけだ．1.5節(p 38)で再び検討されるように，場の量子化を行うと，さらにその意味が明確になる．

電弱統一理論（ワインバーグ-サラム理論 (S. Weinberg, A. Salam)）

上述の場合を含めヒッグス粒子はまだ実験で観測されていないのだが，ここではもう少しで観測されそうな「ヒッグス粒子を含む自発的対称性の破れ」を見てみよう．そこには「究極の統一理論」を目指す物理学者の夢の原型があるのだ．

考えるモデルは$SU(2)\times U(1)$のゲージ対称性をもち，接続であるゲージ場の他にも何種類かのフェルミオンやスカラー場であるヒッグス場で構成される．現実の物理に完全に合うようなモデルを作ると，数学者などの他分野の読者には

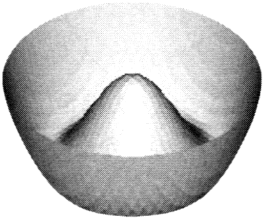


図 1.2　ヒッグス粒子のポテンシャル

興味のない話が続くので,「どういうフェルミオンが存在するか」などは忘れることにして自発的対称性の部分だけ見ることにする．答えから言うと，$SU(2)\times U(1)$ 対称性がヒッグス機構で破れて $U(1)$ になり，$U(1)$ のゲージ場である電磁気力が現れる．

また先ほどと同様に，壊れた対称性に対応するゲージ場は質量をもつ．質量をもった残りのゲージ場がつくる相互作用は「弱い核力」となる．今の場合のヒッグスポテンシャルは，先ほどとは異なり $-|\phi|^2+|\phi|^4$ でワインボトルのように凸凹がある（図 1.2 を参照）．ワインボトルの一番低い部分に円，すなわち $U(1)$ の対称性のある真空が存在する．したがってそこを真空だと思い，先ほどと同様に摂動的に作用を書き直すと，その真空に近いエネルギーレベルの理論として電磁気の理論と弱い核力の理論が現れるのである．

逆に言うと，別々の力で別々の理論だった電磁気力と弱い核力が，ワインの底の凸凹が無視できる高エネルギーの理論では,「統一」された元の $SU(2)\times U(1)$ の理論に戻るということである．この考えは非常に魅力的である．重力，電磁気力，弱い核力，強い核力の 4 つの力は全てゲージ接続で表され，対称性であるゲージ群を与えることで物理理論が決まっていた．当然全てのゲージ群を含む大きな群から，対称性が破れて今の 4 つの理論が現れたという統一のシナリオが期待される．

しかし，残念ながら単純に群を大きくしてもうまくいかないことがわかっている．それは，ゲージ場 A_μ とその他の場の相互作用の強さを表していたゲージカップリング（結合定数）g の高エネルギーの振る舞いからわかる．簡単に言うと，もともと一つのゲージ理論で統一されるなら一つの結合定数で十分のはずな

のに，電弱統一理論の結合定数と強い核力の結合定数が一致しないということである[19)]．その問題を解決する概念として超対称性が登場する．

超対称理論

超対称性は本書の内容を理解する上で最も重要な概念なので，後でもう一度詳しく勉強することにして，ここでは非常に簡単に雰囲気をつかむことにする．

今まで出てきた場の種類は，ローレンツ群の表現の種類で，スカラー場，スピノル場，ベクトル場等に分けられたり，さらにゲージ対称性があればその表現をとったりすることでいろいろ存在してきた．しかしもっと根本的には，可換な成分で書けるボゾンと反可換な成分をもつフェルミオンという分け方があった．まとめると

ボソン：グラスマン偶 ($AB=BA$) に値を持つ場
ゲージ場（力の場）とヒッグス（スカラー）場
フェルミオン：グラスマン奇 ($AB=-BA$) に値を持つ場
スピノル場（物質の場）

という分け方になる．グラスマンの偶を物理では統計性がボゾン的，グラスマン奇をフェルミオン的とも言う[20)]．

超対称性とは非常に簡単に言うと「理論のボゾンとフェルミオンを適当に入れ替えても，理論（作用）が不変である」という対称性のことである．詳しいことは後でもう一度述べる．超対称性を持つ理論はその対称性の高さから非常に綺麗な構造を持ち，そのため統一理論としての候補となってきた．実際に超対称性があると，先ほどは問題であったゲージ結合定数の不一致の問題が解決できることが知られている．物理の理論の統一への流れがどうなっているかという模式図を

---

19)「繰り込み」の説明をしないと正確な説明ができないが，結合定数というのは理論のエネルギーレベルで変化する．理論が統一されるなら結合定数は当然一つでなければならないので，電弱理論の結合定数と強い核力の結合定数が高いエネルギーで一致しなければならないのであるが，それがこのままではうまくいかないということである．

20) グラスマンの偶奇は，ローレンツ表現との組み合わせで確率密度が正で定義できるかどうかという重要な問題をはらんでいる．確率が負になるようでは，理論が解釈できなくなるのでそれを避けなければいけない．そのことからも，スピノル場がグラスマン奇でなければいけないことが結論付けられる．

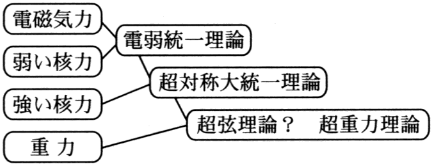


図 1.3　統一理論

書いて，場の古典的な話の締めとする (図 1.3).

1.5　場の量子論

今までの話では，場は「量子化」されていなかった．粒子の「量子化」とは何だったか思い出してみると，$[x,p]=i$ と交換関係を要請することだった．場の理論でもそれを実行することを「第二量子化」あるいは「場の量子化」と呼ぶ．

正準形式

弦理論の量子化で行ったように,「場の」量子化を行う．例えば，実スカラー場の理論を考える．作用は複素スカラー場の場合の (1.44) 同様に

$$S=\int_M d^4x\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\phi\partial^\mu\partial_\mu\phi-V(\phi)\right) \tag{1.63}$$

で与えられる．ただし，$V(\phi)$ はポテンシャル（と質量項）を表している．量子力学で x に相当するものが $\phi(x)$, 正準運動量 p に相当するものが正準共役量 π で,

$$\pi\equiv\frac{\delta L}{\delta(\partial_t\phi)}=\partial_t\phi \tag{1.64}$$

である．ここで $x=(t,x_1,x_2,x_3)$ として，t を時間とした．一般の場 ϕ_i に対しても同様に (1.64) の中のスカラー場 ϕ を ϕ_i で置き換えることで正準共役量 π_i の定義式とすることにする.「正準運動量」ではなく「正準共役量」としたのは，場の理論の運動量は後に出てくるようにネーターの定理などで定義されるからである．点粒子の場合と同様に，同時刻 t で正準交換関係を以下のように要請する．

$$[\phi(t,x),\pi(t,y)]=i\delta(x-y) \tag{1.65}$$

ただし $\delta(x)$ は3次元デルタ関数である．

また，この交換関係は，フーリエモード展開

$$\phi=\int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2h}}(a(k_i)\ e^{-ik\cdot x}+a^\dagger(k_i)\ e^{ik\cdot x}) \tag{1.66}$$

の係数 $a,a^\dagger$ を用いると（ただし $h=\sqrt{k_i^2+m^2}$），

$$[a(k_i),a^\dagger(q_i)]=\delta(k_i-q_i), \quad [a,a]=[a^\dagger,a^\dagger]=0 \tag{1.67}$$

と書き換えることができる．$k\cdot x$ は4次元ベクトルの内積を表し，k_i は3次元ベクトルを表した．この交換関係から，$a^\dagger,a$ は調和振動子や弦理論のときの (1.31) と同じ「生成」「消滅」演算子であることがわかる．

ハミルトニアンも点粒子同様に

$$H=\int dx^3(\pi\partial_t\phi-L) \tag{1.68}$$

$$=\int dx^3\left\{\frac{1}{2}(\pi^2)+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+V(\phi)\right\} \tag{1.69}$$

で定義する．ただし $\nabla=(\partial_1,\partial_2,\partial_3)$ としている．このように定義された量子化された場は，粒子の量子力学で x,p がオペレーターになっていたのと同様，ヒルベルト空間に作用するオペレーター（作用素，演算子）になっている．

具体的にヒルベルト空間は，例えば調和振動子のときのようにフォック (V. Fock) 空間として上の生成・消滅演算子を用いて構成することができる．そうして適当に作られたヒルベルト空間を用い，ヒルベルト空間に属するある初期状態を表す状態ベクトルに，場を演算し，終状態を表す状態ベクトル（の双対ベクトル）ではさんで内積をとると，その現象を与える確率振幅が計算されると解釈する．実際に簡単な例で計算を試みると，どういうことかすっきりするとは思うが，後の内容で使わないので省略する．興味がある人は，場の量子論の参考文献に当たってみてほしい．このようにして正準量子化することは，スカラー場に限らずフェルミオンでもゲージ理論でも可能である．

しかし，ゲージ理論のような局所的な対称性があると，正準運動量を定義する過程で複雑な行程が必要となる．それはゲージ対称性が，拘束条件と深くかかわりあうことが原因であるが，ここではその問題には立ち入らない．とにかくゲージ対称性がある場合には正準量子化が非常に複雑であることを考えると，経路積分の方法を使うほうが便利な場合が多いのでそちらも見てみる．

自由粒子と相互作用

経路積分に入る前に，せっかく正準量子化を勉強したのでその観点から自由粒子と相互作用の意味を考えてみる．生成消滅演算子は，名前の通り粒子が生成したり消滅したりする様子を表しているということに注目しよう．例えば2点関数と呼ばれる以下のような確率振幅を考えてみる．

$$\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle \sim \int dk dq (e^{-ikx+iqy}\langle 0|a(k)a^\dagger(q)|0\rangle + h.c.)$$

$h.c.$ は直前の項のエルミート共役を表している．いつものように $|0\rangle$ は真空を表している（つまり $a|0\rangle=0$）とし，定数係数は省略したので「=」でなく「∼」になっている．これを右から読むと「真空」から粒子が「生成」し，自由粒子の運動方程式 (1.62) の解である「平面波」が伝わり「消滅」し,「真空」にもどる様子が式で表されていることがわかる．これは自由な粒子の伝播である．図 1.4 の左側の線分が自由粒子が慣性運動している様子を表している．このように運動を表す図（仮想的な運動なども含めて便宜的に書いた図）をファインマン図 (R. Feynman) という．

一方，相互作用項が例えば4次 ($V(\phi)=\phi^4$) で入るとすると $a^\dagger(q)a^\dagger(q')a(p)a(p')$ のような項が出てくる．これを解釈すると，一点で二つの粒子が消滅し二つの粒子が生成するという現象を表し，相互作用を式で表したものであることがわか



図 1.4　自由な伝播と相互作用

る．つまり2点関数を表す線分のファインマン図と組み合わせると，図1.4の右側の図が描けることがわかる．4つの線が交わっているところが相互作用で，2線分の端点の場を消滅させ，新たな2線分の端点の場を生成していると理解できるのである．

1.5.1　ネーターの定理

経路積分に入る前に，場の理論の中で中心的役割を果たす「対称性」と「保存電荷」と「生成子」に関して簡単にまとめておく．一般の場の組 $\{\phi_i\}$ で定義されるある作用 $S=\int d^4xL(\phi_i(x),\partial_\mu\phi_i(x))$ に対し，以下のような一般的な無限小変換を考えることにする．

$$\phi_i(x)\longrightarrow\phi'_i(x')=\phi_i(x)+\delta\phi_i(x) \tag{1.70}$$

こうした変分は一般に座標も変化するので偏微分と非可換であることに注意されたし．

関数形の変化と座標の変化を分けて書くと

$$\bar{\delta}\phi_i(x)=\phi'_i(x)-\phi_i(x) \tag{1.71}$$

となる．これは偏微分と可換で

$$\bar{\delta}(\partial_\mu\phi_i)=\partial_\mu(\bar{\delta}\phi_i) \tag{1.72}$$

である．この変換ともとの変換との関係は

$$\bar{\delta}\phi_i(x)=\delta\phi_i(x)-\delta x^\mu\partial_\mu\phi_i(x) \tag{1.73}$$

である．ただし，2次の変化は無視して $\delta x^\mu\partial_\mu\phi_i(x)=\delta x^\mu\partial'_\mu\phi_i(x)$ としている．したがって (1.70) で引き起こされるラグランジアンの変分は

$$\begin{aligned}\delta L&=\bar{\delta}L+\delta x^\mu\partial_\mu L\\&=\frac{\partial L}{\partial\phi_i}\bar{\delta}\phi_i+\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu\phi_i)}\bar{\delta}(\partial_\nu\phi_i)+\delta x^\mu\partial_\mu L\end{aligned} \tag{1.74}$$

で与えられる．偏微分と $\bar{\delta}$ の順序を入れ替え，(1.73) を使うと次のようになる．

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \phi_i}\delta\phi_i - \frac{\partial L}{\partial \phi_i}(\partial_\mu \phi_i)\delta x^\mu$$
$$+ \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu \phi_i)}\partial_\nu \delta\phi_i - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu \phi_i)}\partial_\nu(\partial_\mu \phi_i \delta x^\mu) + \delta x^\mu \partial_\mu L$$

また $x^\mu \to x^\mu + \delta x^\mu$ により積分測度も変換され，δx^μ が無限小であることを使うと，積分測度のズレが以下のように出る．

$$\delta(d^4x) = d^4x\,\partial_\mu \delta x^\mu \tag{1.75}$$

結局，作用に対する変換は

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\,(L\partial_\mu \delta x^\mu + \delta L)\\ &= \int d^4x\,\partial_\mu \left(\left(g^\mu{}_\nu L - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\partial_\nu \phi_i \right)\delta x^\nu + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\delta\phi_i \right)\\ &\quad + \int d^4x \left(\frac{\partial L}{\partial \phi_i} - \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu \phi_i)} \right)(\delta\phi_i - \delta x^\mu \partial_\mu \phi_i)\end{aligned} \tag{1.76}$$

で与えられる．最後の行は運動方程式なので 0 としよう．この式からわかるのが次のネーターの定理である．

ネーターの定理 (E. Noether)

作用が変換 δ のもと不変（つまり (1.76) が 0）という対称性を持つとき**カレント**

$$J^\mu = \left(g^\mu{}_\nu L - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\partial_\nu \phi_i \right)\delta x^\nu + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\delta\phi_i \tag{1.77}$$

が定義され (1.76) より次の保存則が成立する

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \tag{1.78}$$

保存電荷（生成子）

次に保存電荷を次式で定義する．

$$Q = \int dx^3 J^0 \tag{1.79}$$

(1.78) を用いると一般に $\partial_t Q=0$ なので，これは時間とともに変化しない保存量である．これを保存電荷とも呼ぶ[21]．

また重要なことは，**この電荷は変換の「生成子」であるということだ**．式で書くと

$$i[Q,\phi_i]=\delta\phi_i \tag{1.80}$$

である．このことを以下で確かめてみよう．簡単のため $\delta x=0$ の場合を示すが，本質は損なわれないだろう．このとき (1.77) と (1.79) より，正準共役量 π_i を使うと電荷は

$$Q=\int dx^3\delta\phi_i\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}=\int dx^3\delta\phi_i\pi_i$$

で与えられる．したがって

$$i[Q,\phi_j]=\int dx^3\delta\phi_i[\pi_i,\phi_j]=\delta\phi_j \tag{1.81}$$

となるので証明された．ここで正準交換関係 $[\pi_i(x),\phi_i(y)]=-i\delta_{ij}\delta(x-y)$ を用いた．以下に代表的な保存量であるエネルギー（ハミルトニアン）と運動量について，4 次元ユークリッド空間の場合に実際にネーターの定理から導いてみる．

例 1.12　ハミルトニアンと運動量

座標は人間が勝手に設けた基準なので物理法則はその取り方によらない．よって座標を並進する変換に対して不変であることを要請する．つまり，$\delta\phi=0, \delta x_\mu=\varepsilon_\mu$ (ε_μ は定ベクトル）の変換で作用が不変であると要請する．

このとき**エネルギー運動量テンソル** $T^{\mu\nu}$ を

$$T^\mu{}_\nu=g^\mu{}_\nu L-\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial_\nu\phi_i \tag{1.82}$$

と定義すると，これを用いて保存カレントはネーターの定理から

$$J^\mu=T^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu \tag{1.83}$$

---

[21]保存電荷といっても一般には電磁気の電荷とは関係ない．「charge」の訳語として電荷と言う言葉が使われている．

と得られる．ε_μ は定ベクトルなので運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ 自体が保存則 $\partial_\mu T^{\mu\nu}=0$ を満たす．

時間方向の並進対称性を見るために $\varepsilon^\mu=\varepsilon\delta^{\mu 0}$ とすると保存電荷は

$$Q/\varepsilon=\int d^3x(\pi_i\partial_t\phi_i-L)=H \tag{1.84}$$

となりハミルトニアン（エネルギー）が出てくる．つまり時間についての並進不変性から出てくる保存量がエネルギーである．さらに保存量は，その変換を生成する生成子であったので，H **が時間推進演算子であること**が理解される．同様にして，空間方向の並進対称性を見るために $\varepsilon^\mu=\varepsilon\delta^{\mu i}$ とする．$\mu\in\{0,1,2,3\}$ は 4 次元時空全部の方向をあらわす添字だったのに対し，$i\in\{1,2,3\}$ は時間を除いた 3 次元空間を表していることに注意せよ．保存電荷として $\int d^3xT^{0i}$ が出てきてこれが場の空間並進の生成子であることも理解できる．したがって，これが運動量になっている．

この運動量が語源となって，運動量写像がネーターの定理の一般化として定義されるわけである．並進群作用から運動量写像を構成すると，実際に上で導出した運動量になっていることを確かめてみることはよい演習となるであろう．

1.6　経路積分による量子化

前の節で述べたように，正準量子化のままではゲージ対称性があるような拘束系では少し手間がかかる．また，量子化の幾何学的な意味付けも容易であることから，経路積分による量子化を導入することにする．

1.6.1　ガウス積分

まず，摂動的な経路積分の解釈に必要なガウス積分 (C.F. Gauss) の公式を復習する．

有限次元のガウス積分

n 次元実ベクトル x とエルミート行列 A に対し

$$\int dx_1 \cdots dx_n \exp(-x^T Ax) = \sqrt{\left(\frac{\pi^n}{\det A}\right)}$$

である．n 次元複素ベクトル z とすると

$$\int dz_1 d\bar{z}_1 \cdots dz_n d\bar{z}_n \exp(iz^\dagger Az) = \frac{(2\pi)^n}{\det A} \tag{1.85}$$

である．これを無限次元に拡張する．

場のガウス積分

実ボゾニックな場 $\phi_i(x)$ と微分も含んでよい作用素 A に対し，

$$\int \mathcal{D}\phi \exp(-\phi_i(x)A^{ij}(x,y)\phi_j(y)) = C\sqrt{\left(\frac{1}{\det A}\right)} \tag{1.86}$$

複素ボゾニック場 $\phi_i(x)$ に対しても同様に

$$\int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\bar{\phi} \exp(i\bar{\phi}_i(x)A^{ij}(x,y)\phi_j(y)) = C'\frac{1}{\det A} \tag{1.87}$$

と形式的に定義する．C,C' は無限になる定数であるが，ガウス積分を用いて経路積分を定義するときは規格化定数で割るので，これらは無視することができる．行列式を評価するのはケースバイケースで難しいのだが，少なくともこの本のなかでは，そういった正則化や力学的な解析をする必要がないので，単純に有限次元の拡張としての形式的な無限次元ガウス積分が定義できるとする．

フェルミオンの積分

フェルミオンの場合はどうだろうか．積分の並進不変性の要請からフェルミオンの積分は

$$\int d\psi\psi = 1, \qquad \int d\psi = 0$$

と定義され，微分と積分が同じになる．こうしたフェルミオン積分の定義はベレジン積分 (F.A. Berezin) とも呼ばれる．この定義のもと，変数変換で現れるヤコビアン J はどうなるだろうか．フェルミオン ψ_i を ${\psi'}_i = A_i{}^j\psi_j$ と変数変換すると

$$
\begin{aligned}
J &= \int d\psi'_1 \cdots d\psi'_n J \psi'_1 \cdots \psi'_n \\
&= \int d\psi_1 \cdots d\psi_n \ \psi'_1 \cdots \psi'_n \\
&= \int d\psi_1 \cdots d\psi_n \ (A_1{}^j \psi_j) \cdots (A_n{}^j \psi_j) \\
&= \int d\psi_1 \cdots d\psi_n \ \psi_1 \cdots \psi_n (\det A) = \det A
\end{aligned}
$$

である．3 行目から 4 行目の変形は ψ_i が反可換であることを使っている．結果，$J=(\det A)$ となり，**ボソンとは逆**に出てくることがわかった．ボソンのような普通の変数のヤコビアンの逆数になっているので，ガウス積分のように行列を対角化するために変数変換すると，ヤコビアンとしての行列式も逆に出てくる．

フェルミオンのガウス積分

ヤコビアンの出方がボソンと逆なのでガウス積分の結果も逆で，ψ_i を実グラスマン奇とし M^{ij} を反対称行列とすると

$$
\int d\psi_1 \cdots d\psi_n \ \exp(-\psi_i M^{ij} \psi_j) = 2^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det M} \tag{1.88}
$$

である．したがってボソンとフェルミオンが対称に入っていると，ガウス積分で出てくる行列式がお互いに相殺することが予想されるであろう．これが「超対称性や位相的場の理論で，無限大の定数で規格化しなくても有限の期待値が出てくる理由」になっている．後で位相的場の理論の場合に具体的に見るが，非常に本質的なので覚えておいていただきたい．

1.6.2　経路積分による量子化

古典的な運動方程式は作用（汎関数）の極値を与えるものとして定義された．したがって，場の理論の古典解は，関数空間で作用の極値を与える軌跡として求まる（図 1.5 参照）．

経路積分の思想は，摂動論的には古典解の周りでガウス分布で重みを与えてあらゆる軌道で積分するということになる（図 1.6 参照）．

細かい問題は置いておき，作用 S が与えられているとき O という観測量を観

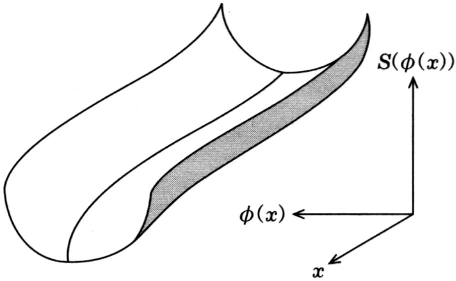


図 1.5　古典解：時空を 1 次元の x として，作用 $S(\phi)$ が最小となる関数 ϕ が古典的に決定される様子．

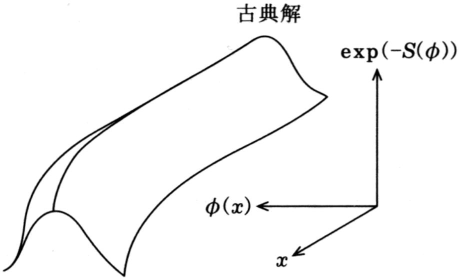


図 1.6　ガウス分布（スカラー場の場合）：古典的に決定された軌道の周りのガウス分布の様子．$S(\phi)$ を ϕ の 2 次で近似した時の $\exp(-S)$ の様子とも言える．

測する期待値を，汎関数積分を用いて

$$\frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\phi_i O \exp(-S(\phi_i)) \equiv \langle O \rangle \tag{1.89}$$

と定義することが「経路積分による量子化」である．ただし Z は，無限次元ガウス積分による発散項を取り除くために $Z = \int \mathcal{D}\phi_i \exp(-S(\phi_i))$ で割ってある．これは後で出てくる位相的場の理論のように，ボゾンとフェルミオンで無限回ガウス積分の相殺がおこる場合は付けないこともある．単純に規格化の問題と考えてほしい．

また $\int \mathcal{D}\phi_i$ は関数空間上の無限次元積分であり，後で見るように格子で切って定義した上で極限をとったものである．あるいは複素で考えて，重みの $\exp(-S(\phi_i))$ を $\exp(iS(\phi_i))$ と置くことで定義する場合もある．

$$\frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\phi_i \, O \exp(iS(\phi_i)) \equiv \langle O \rangle \tag{1.90}$$

この違いは，もともとミンコフスキー計量とユークリッド計量の場合では，時間が i 倍異なると定義すること（ウィック回転 (G-C. Wick)）で関係付けられることに由来している．すぐ後の例で見るように，ミンコフスキー計量の場合に i が付いている (1.90) を用い，ユークリッド計量の場合に (1.89) を用いる．

経路積分に関しては，いくつかのモデルを除いては数学的にはちゃんと定義されているとはいいにくい．ガウス積分の無限次元への拡張という意味では大きく問題は起こらない．しかし実際の作用の中には相互作用として場の 3 次以上の項が存在するので，そのあたりを含めての定義は，2 次元の理論のいくつかの例を除くと，まだできていない．実際に，相互作用を含めた計算をどう行うかは，後の 1.6.3 節の摂動計算のところで見ることができる．こうした事情をふまえて，無理に経路積分を厳密に定義することはあきらめ，ここでは詳細について考察することは全く省略する．理解すべきことは，O を観測する期待値 $\langle O \rangle$ を定義するときに重みとして $\exp(-S(\phi_i))$ あるいは，$\exp(iS(\phi_i))$ を付けて積分せよということである．そうすることで，作用 S の最小値からの寄与が最も積分に寄与するため，古典的な運動方程式の解が最も実現されうる状態を与える．しかしながらそうでないことが起こりうる確率がガウス分布的な広がりをもって存在している．またこのように経路積分で量子化を定義することで，正準量子化のように場を「作用素」と考える必要はない[22]．

ここで補足として，経路積分による量子化の場合にどこにプランク定数 $\hbar$ が入るのかについてコメントしておこう．正準量子化の場合は交換関係の 0 からのズレとして $[x,p] \sim \hbar$ として出てきていた．経路積分による量子化の場合は，経

[22] 後の章で登場する位相的場の理論の場合等，位相不変量の定式化に用いる量子化では場を作用素と考える必要がない．しかし，一般には正準量子化による理論の補強を抜きに定式化できるとまでは言えない．

路積分の重みを $\hbar$ が 1 でない場合を書くと

$$\exp\left(-\frac{1}{\hbar}S(\phi_i)\right) \quad \text{あるいは} \quad \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(\phi_i)\right) \tag{1.91}$$

というように，逆冪で現れている．したがって $\hbar$ が 0 に近づく古典理論への極限では，ガウス分布が鋭いピークとなりデルタ関数に近づく．つまり古典的な解からの寄与しか存在しなくなり古典理論に収束することになる．作用の係数として $\frac{1}{\hbar}$ がついていることは，摂動的に量子効果を $\hbar$ の何次まで取り入れるかを考える上で重要になる．この点も摂動計算のところで見る．

例 1.13　自由場の 2 点関数（プロパゲーター，伝播関数）

一つの例として 4 次元ミンコフスキー空間のスカラー場の伝播関数を，経路積分を用いて計算してみる．スカラー粒子が x から y に飛ぶ期待値は，$S(\phi)$ をスカラー場の作用として

$$\frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\phi\, \phi(x)\phi(y)\exp(iS(\phi)) = \langle\phi(x)\phi(y)\rangle \tag{1.92}$$

で求めることができる[23]．この期待値 $\langle\phi(x)\phi(y)\rangle$ を 2 点関数，プロパゲーター，伝播関数などと呼ぶ．簡単のため，実スカラー場の自由粒子の場合（相互作用がない場合）の 2 点関数を見てみよう．作用は複素スカラー場の運動項と同様で，

$$S_f = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2\right) = \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\phi(\Box + m^2)\phi\right) \tag{1.93}$$

で与えられる．2 点関数を計算するために，補助的に導入する外場 $J(x)$ を用いて

$$Z_f(J) := \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\phi \exp\left(i\left(S_f + \int d^4x J(x)\phi(x)\right)\right) \tag{1.94}$$

を定義する．経路積分に伴う Z は規格化定数である．ラグランジアンの中に $J(x)\phi(x)$ という項を付け加えたものだ．Z_f や S_f の添字の f は自由場 (free な場) だけ考えていることに由来する．$Z_f(J)$ のような量を定義するのは，一般に n 点関数 $\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle$ の生成汎関数になっていて，

[23] 正確に言うと，逆向きの y から x に飛ぶものとの和．

$$\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle=\frac{1}{(i)^n}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(x_n)}Z_f(J)\bigg|_{J=0} \tag{1.95}$$

となるからである．exp の中身を無限次元行列 $(\Box+m^2)\delta(x-y)=M(x-y)$ ($\delta(x-y)$ は 4 次元のデルタ関数）を用いて以下のように平方完成してみる．

$$\begin{aligned}S_f+\int d^4xJ(x)\phi(x)=&\int d^4ud^4v\left\{\frac{1}{2}\phi(u)M(u-v)\phi(v)+J(u)\phi(v)\delta(u-v)\right\}\\=&\int d^4ud^4v\left\{\left(\phi(u)+\int d^4zJ(z)M^{-1}(z-u)\right)\frac{M(u-v)}{2}\right.\\&\left.\times\left(\phi(v)+\int d^4wJ(w)M^{-1}(w-v)\right)\right\}\\&-\frac{1}{2}\int d^4wd^4zJ(w)M^{-1}(w-z)J(z)\end{aligned} \tag{1.96}$$

となる．ただし $M^{-1}(y-z)$ は

$$\int d^4yM(x-y)M^{-1}(y-z)=\delta(x-z)$$

を満たすグリーン関数 (G. Green) とした．(1.96) の一行目は $\phi\to\phi(u)-\int dzJ(z)M^{-1}(z-u)$ と変数変換することでガウス積分を実行でき，$Z_f(0)$ に一致する．係数 $1/Z$ は，$Z_f(0)$ を規格化するためについていた係数であり，キャンセルするように決める．結局 $Z_f(J)$ は

$$Z_f(J)=\exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)M^{-1}(x-y)J(y)\right) \tag{1.97}$$

で得られる．この $Z_f(J)$ を用いると 2 点関数は

$$\begin{aligned}\langle\phi(x)\phi(y)\rangle=&\frac{1}{Z}\int\mathcal{D}\phi\,\phi(x)\phi(y)\exp(iS(\phi))\\=&\left\{\frac{1}{i^2}\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta J(y)}Z_f(J)\right\}\bigg|_{J=0}=iM^{-1}(x-y)\end{aligned} \tag{1.98}$$

となり，2 点関数がグリーン関数で与えられることがわかる．これはファインマン図では線で表すべきもので，図 1.4 の左の線がグリーン関数 $M^{-1}(x-y)$ を表す．

この導出をみると，スカラー場に限らず自由場の 2 点関数（プロパゲーター，伝播関数）は作用されている演算子（一般にはダランベリアン，ラプラシアン，

ディラック作用素など）のグリーン関数として得られることがわかる．

$$S_{\rm free} = \int \phi_i M \phi_j \Longrightarrow \langle \phi_i(x)\phi_j(y)\rangle \sim \frac{1}{M} \tag{1.99}$$

自由粒子（運動項だけ）の場合はガウス積分の実行で完全に決定されるが，相互作用が入っているときはガウス積分からのズレを摂動的に評価することとなる．ただしこの本の内容では摂動計算はほとんど行わず，結果だけを引用する．そのためそれについては次節で改めて簡単に扱うが，興味のない読者は読み飛ばしてもよいものとする．

次に正準量子化と経路積分の関係について考察する．初めに与えた正準量子化の方法と経路積分の量子化が異なる結果を与えては，どちらが正しい量子論であるかわからないことになってしまう．多くの場の理論について，経路積分による量子化は正準量子化と等価であることが示される．

経路積分と正準形式の対応

ここでは，正準量子化と経路積分による量子化が同値であることを見たいのだが，まともにやると少し長くなるので多少いいかげんな議論でここは我慢してもらう．正確な議論ではないが，エッセンスは伝わると思われる．より正確な議論が知りたい場合は，例えばスワンソン (M. Swanson) の教科書 [12] などを参照されたし．簡単のためスカラー場について，経路積分の量子化と正準形式の量子化の対応を見てみる．正準量子化で次の始状態 $|\phi_{\rm I}\rangle$ から終状態 $\langle\phi_{\rm F}|$ の遷移振幅を考える．

$$\langle\phi_{\rm F}|\exp(-i\hat{H}t)|\phi_{\rm I}\rangle$$

ここで ϕ は空間 x_i のみに依存することとし，時間依存性は指数として分けて書かれている．ハミルトニアンが時間推進の演算子であったことを思い出すと，この式はスカラー場の初期状態 $\phi_{\rm I}$ が時間 t の後，終状態 $\phi_{\rm F}$ に移る遷移振幅（その大きさが確率）を表している（添字の I は “initial state” と F は “final state” を表す．また “ˆ” は作用素であることを表す）．これを経路積分に移行するには次のようなことをする．

時間を N 等分し無限小時間間隔 $\Delta t = t/N$ の遷移の無限の積 (N 個の積とし

ておき後で $N \to \infty$ とする意味での無限の積）で置きなおす．時間を飛び飛びの値 $j=0\cdots N$ でインデックスする．つまり ϕ_j は j 番目の時刻の場とし，今までの場の種類の添字 i とここでは異なることに注意．$j=0$ が初期状態で，$j=N$ が終状態である．したがって，隣の時間に移る遷移振幅は，

$$\langle\phi_{j+1}(t_j+\Delta t)|\phi_j(t_j)\rangle=\langle\phi_{j+1}(t_j)|\exp(-iH\Delta t)|\phi_j(t_j)\rangle$$

となる．正準共役量 (1.64) を用いるとハミルトニアンは $H=\int dx^3\{\pi^2/2+(\nabla\phi)^2/2+V(\phi)\}$ であった（(1.69) 参照）．最初に運動項 $\pi^2/2$ のみに注目すると，完全系 $1=\int\mathcal{D}\pi|\pi_j\rangle\langle\pi_j|$ をはさむことで

$$\begin{aligned}
&\langle\phi_{j+1}(t_j)|\exp\left(-i\int dx\frac{\hat{\pi}^2}{2}\Delta t\right)|\phi_j(t_j)\rangle\\
&=\langle\phi_{j+1}(t_j)|\int\mathcal{D}\pi\exp\left(-i\int dx\frac{\hat{\pi}^2}{2}\Delta t\right)|\pi_j\rangle\langle\pi_j|\phi_j(t_j)\rangle\\
&=\int\mathcal{D}\pi\exp\left(-i\int dx\frac{\pi_j^2}{2}\Delta t\right)\exp\left(i\int dx\pi_j(\phi_{j+1}-\phi_j)\right)
\end{aligned}$$

となる．2 行目から 3 行目に変形する際，交換関係からしたがう

$$\langle\pi_j|\phi_j(t_j)\rangle=\exp\left(i\int dx\pi_j\phi_{j+1}\right) \tag{1.100}$$

を用いた[24)]．ポテンシャル（相互作用）の項なども同様に計算することができ，結果は以下のようになる．

$$\langle\phi_{j+1}(t_j+\Delta t)|\phi_j(t_j)\rangle=\int\mathcal{D}\pi\exp\left(i\int dx\frac{\pi_j(\phi_{j+1}-\phi_j)}{\Delta t}-H\right)\Delta t$$

これを t_1 から t_N まで掛たものをあらゆる経路（あらゆる関数）について足しあげたものが $\langle\phi|\exp(-i\hat{H}t)|\phi\rangle$ であるが，$\Delta t\to 0$ の極限で $(\phi_{j+1}-\phi_j)/\Delta t$ は微分 $d\phi_j/dt$ になるから，ハミルトニアン H の定義を思い出すと

---

24) $\langle\pi_j|$ は，固有値が π_j の π の固有状態であるから，$\pi\langle\pi_j|\phi_j(t_j)\rangle=\pi_j\langle\pi_j|\phi_j(t_j)\rangle$．また交換関係から $\pi_j=i\dfrac{\delta}{\delta\phi}$ とみなされ，$\pi\langle\pi_j|\phi_j(t_j)\rangle=i\dfrac{\delta}{\delta\phi}\langle\pi_j|\phi_j(t_j)\rangle$ となることからわかる．量子力学で $\langle p|x\rangle=\exp(-ipx)$ となるのと同じ．

$$\sum_j \int dx \left(\pi_j \frac{d\phi_j}{dt} - H\right) \Delta t \longrightarrow S(\phi) \tag{1.101}$$

と作用 S が現れる（正確には π の汎関数積分を実行すると作用になる）．中間状態は全ての可能な経路についても足しあげられるので，汎関数積分 $\int \mathcal{D}\phi$ も現れる．以上のようにして，正準量子化が経路積分と等価であるという対応を見ることができる．

1.6.3　摂動論とファインマン則

この節では摂動論と「ファインマン則」について述べる．しかし本書の内容では摂動論の結果の導出はしていないので，事実を認めてしまうのであれば，本節は必ずしも必要ではない．ただ，本書で用いる摂動論で得られる結果は，本質的にこの節と次節の計算手法と同様の計算から得られることであるため，知っておくと説得力は増すであろう．また，後で有効場の理論について論じられるところで,「くりこみ」が重要になるのであるが，次の節の「くりこみ」を理解するにはこの節の内容は必要になる．しかし,「くりこみ」の計算自体も後で絶対に必要というわけではない．したがって，後で興味が出たらこの節に戻ってみてもいい．

この節でも簡単のため 4 次元ミンコフスキー空間での実スカラー場について限定して論じることにする．その他の場の場合も複雑さは生じてもエッセンスは同じである．作用として (1.93) の S_f に相互作用 $S_{\rm int}$ を付け加えたものとする．

$$\begin{aligned} S &= S_f + S_{\rm int} = \int d^4x (L_f(\phi) + L_{\rm int}(\phi)) \\ L_{\rm int}(\phi) &= \frac{-\lambda}{4!}\phi^4 \end{aligned} \tag{1.102}$$

このような相互作用を持つスカラー場の理論を「ϕ^4 理論」と呼ぶ．(1.94) と同様に $Z(J)$ を外場 J を使って以下のように導入する．

$$Z(J) = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\phi \exp\left(i(S + \int d^4x J(x)\phi(x))\right) \tag{1.103}$$

摂動論の大きな目標は，時空の n 個の点 $x_1 \cdots x_n$ に粒子の観測される散乱振幅を計算する n 点関数 $\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle$ を求めることである．$Z(J)$ を用いると

$$\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle=\frac{1}{(i)^n}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(x_n)}Z(J)\bigg|_{J=0} \tag{1.104}$$

となる．$Z(J)$ に対して，ϕ を $\dfrac{\delta}{i\delta J}$ で置き換えられるという事実を使い，$L_{\rm int}(\phi)\to L_{\rm int}\left(\dfrac{\delta}{i\delta J}\right)$ と置き換えて，(1.94) を用いると

$$Z(J)=\exp\left(\int d^4x\,L_{\rm int}\left(\frac{\delta}{i\delta J}\right)\right)\times Z_f(J) \tag{1.105}$$

となる．ところで $\exp\left(i\int dxJ(x)\phi(x)\right)$ があると，(1.97) の J は逆に $\dfrac{\delta}{i\delta\phi}$ と置き換えることができるから

$$\begin{aligned}Z(J)=&\exp\left(\int d^4x\,L_{\rm int}\left(\frac{\delta}{i\delta J}\right)\right)\\&\times\exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y\frac{\delta}{i\delta\phi(x)}M^{-1}(x-y)\frac{\delta}{i\delta\phi(y)}\right)\\&\times\exp\left(i\int d^4u\,J(u)\phi(u)\right)\bigg|_{\phi=0}\end{aligned} \tag{1.106}$$

となる．こうしておいてから順番を入れ替えて

$$\begin{aligned}Z(J)=&\exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y\frac{\delta}{i\delta\phi(x)}M^{-1}(x-y)\frac{\delta}{i\delta\phi(y)}\right)\\&\times\exp\left(\int d^4x\,L_{\rm int}(\phi)\right)\times\exp\left(i\int d^4u\,J(u)\phi(u)\right)\bigg|_{\phi=0}\end{aligned} \tag{1.107}$$

を得ることができる．なぜこのような面倒な式変形をしたかといえば，(1.107) の右辺の 1 行目の意味するところが重要だからだ．つまり (1.107) は，相互作用などに現れる ϕ の 2 個の組 $\phi\phi$ を M^{-1} で置き換えることで計算ができることを主張している．

摂動論

相互作用項の指数関数を展開して

$$\exp\left(i\int dxL_{\rm int}(\phi)\right)=1+i\int d^4x\frac{-\lambda}{4!}\phi^4+\frac{1}{2}\left(i\int d^4x\frac{-\lambda}{4!}\phi^4\right)^2+\cdots \tag{1.108}$$

とし，2 点関数がどのように求められるかを見てみる．2 点関数の $\hbar$ の展開による摂動計算をするのであるが，最初のリーディングの補正項を求めるには $\int d^4x L_{\rm int}(\phi)$ の 2 次以上の項は必要がないことが後でわかる．(1.104) と (1.107) および (1.108) を用いると，2 点関数は

$$\begin{aligned}\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle &= \left\{\frac{1}{i^2}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}Z(J)\right\}\Big|_{J=0} \\ &= \exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y \frac{\delta}{i\delta\phi(x)}M^{-1}(x-y)\frac{\delta}{i\delta\phi(y)}\right) \\ &\quad\times\left(\phi(x_1)\phi(x_2)+i\phi(x_1)\phi(x_2)\int d^4x\frac{-\lambda}{4!}\phi^4(x)+\cdots\right)\Big|_{\phi=0}\end{aligned} \tag{1.109}$$

と展開される．ϕ の 2 個の組 $\phi\phi$ を M^{-1} で置き換えることができるのであったから，(1.109) の右辺の最後の括弧のなかの第 1 項 $\phi(x_1)\phi(x_2)$ はグリーン関数 $M^{-1}(x_1-x_2)$ で置き換えられる．そしてそれは図 1.4 の左の線分（両端の座標が x_1 と x_2）であり，前節で見た自由な粒子の伝播関数そのものであった．(1.109) の右辺の最後の括弧のなかの第 2 項は，相互作用のラグランジアン $\dfrac{-\lambda}{4!}\phi^4(x)$ を含むので，当然相互作用を含む寄与を作り出す．

ϕ の 2 個の組 $\phi\phi$ を M^{-1} で置き換えることを再び繰り返すと，一例として次のようなものが現れる．

$$i\lambda\int d^4u M^{-1}(x_1-u)M^{-1}(u-u)M^{-1}(u-x_2) \tag{1.110}$$

発散する $M^{-1}(u-u)$ については後で考えるとして，この (1.110) が何であるか考えよう．(1.110) は，実は図 1.4 の右側の図（グラフ）に対応している．まず，$M^{-1}(x_1-u)$ は図の片方の端点 x_1 から 4 本の線の交点 u にグリーン関数（伝播関数）で伝播する．そして交点 u からループを描いてまた同じ交点に伝播するのを $M^{-1}(u-u)$ で表し，最後に交点 u から端点 x_2 に伝播関数 $M^{-1}(u-x_2)$ で伝わっていく，という物理的な描像であることがわかる（図 1.7 参照）．u による積分は相互作用が空間のどの点でも起こりうるので，全空間について足しあげたものである．他にも展開を続けると，いろいろな図に対応するグリーン関数を

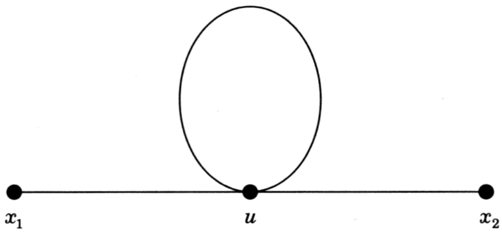


図 1.7　(1.110) のファインマン図．線は M^{-1} による伝播を表す．

組み合わせて交点で積分した量が出てくるが，全てを足しあげることができればそれが正しい 2 点関数を与えたことになる．もちろん，全て計算するのは一般には無理なので，適当な条件の下で図（グラフ）の数を制限して計算することが，摂動的に 2 点関数を求めることになる．

このように，一般に相互作用を含む場の理論の n 点関数を求めたいならば，相互作用の部分は展開しておき，二つの場の組をグリーン関数（伝播関数）で置き換えていくことで，（発散の処理を除いて）計算ができることが理解できるだろう．しかも，グリーン関数の部分を線分で書き，相互作用の部分を交点で表すことで直観的に理解しやすい「ファインマン図」と呼ばれるグラフを書くことができる．

$M^{-1}(u-u)$ の発散の処理はまだ行っていないのであるが，そのためにもフーリエ変換した表示で見る方が楽なので次で説明する．

運動量表示

フーリエ変換で運動量 k で表される表示に直すと，自由場の伝播関数 $M^{-1}(x)$ は

$$\tilde{M}^{-1}(k)=\int d^4ke^{-ik^{\mu}x_{\mu}}M^{-1}(x) \tag{1.111}$$

と変換される．$M^{-1}(x)$ の定義式 $(\Box+m^2)M^{-1}(x)=\delta(x)$ をフーリエ変換すると，

$$(-k^2+m^2)\tilde{M}^{-1}(k)=1 \tag{1.112}$$

となり，したがって

$$\tilde{M}^{-1}(k)=\frac{1}{-k^2+m^2} \tag{1.113}$$

と簡単に表される．ただし，$1/(-k^2+m^2)$ の分母のゼロ点を避けるために $-k^2+m^2-i\varepsilon$ と無限小の虚数分ずらしておく必要がある[25]．こうして得られた運動量表示を用いて，スカラー場の摂動計算の方法を以下に与える（もちろん，一般の場の理論の場合も同様である）．

摂動計算を何で展開して計算するかを明示せずに話を進めてきたので，ここでその点を明らかにする．

$\hbar$ とループ

量子効果を計算する際，$\hbar\to 0$ で古典理論になるのであるから，$\hbar$ の展開で摂動計算をするのは妥当な計算方法だろう．しかも実は $\hbar$ の冪とループの数に対応関係がある．前節で見たように，運動項のラグランジアンが $\phi M\phi$ ならば自由場の伝播関数はおおよそ $1/M$ で与えられる．経路積分の重みに $\hbar$ をあらわに書くと (1.91) であったので，運動項のラグランジアンも $\phi(M/\hbar)\phi$ であり，伝播関数も $\hbar/M$ となる．したがってファインマン図の線分は $\hbar$ の 1 次に比例する（図 1.8 の左の線分を参照）．一方で相互作用を表す部分は，例えば (1.102) の場合，$\hbar$ をあらわに書くと $\dfrac{-\lambda}{4!\hbar}\phi^4$ であるから，相互作用が起こるたびに $1/\hbar$ が乗ぜられる（図 1.8 の右の交点を参照）．

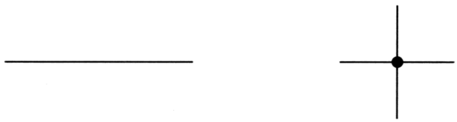


図 1.8　スカラー場の ϕ^4 理論の場合．左の線分が伝播関数 M^{-1} に対応し $\hbar$ に比例する．右の交点は相互作用 $-i\dfrac{\lambda}{4!}$ を表し $1/\hbar$ に比例する．

[25] ラグランジアンに $i\varepsilon\phi^2$ を付け加えているわけだが，経路積分の収束性をよくしていると思うこともできる．

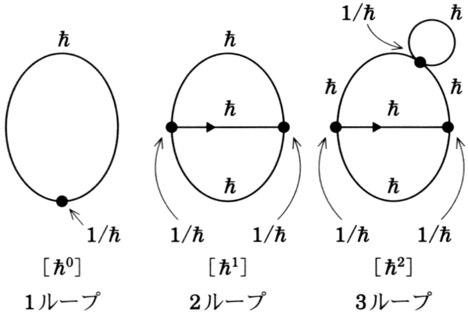


図 1.9　スカラー場の ϕ^4 理論の場合．ループの数から 1 を引いたものが $\hbar$ の次数になる．

これらの $\hbar$ の次数を付与して，ファインマン図ごとに $\hbar$ の次数を勘定すると図 1.9 となる．図 1.9 の左端がループの数が 1 のグラフで $\hbar$ の次数が 0 である．図 1.9 の中央が 2 ループのファインマングラフで $\hbar$ の次数が 1, 右のグラフが 3 ループで $\hbar$ の次数が 2 である．ここでは証明は与えないが，一般に

$$(\text{ループの数}) - 1 = (\text{グラフの } \hbar \text{ の次数})$$

という公式が成り立つことが知られていて，上の例から十分納得できるだろう．したがって，$\hbar$ 展開して摂動論を行うことは，ファインマングラフに現れるループの数で展開（ループ展開）して計算することに等しいことがわかる．そのため，ループ展開で以下の計算を進めることにする．

ファインマン則

ファインマン則とは場の理論の摂動的計算の方法をまとめたものである．今までの議論をまとめると，つぎのように計算するとよいことがわかる．

《Step1》 ファインマン図を描く．つまり，n 点関数を計算するならば，n 個の端点を持つグラフを，理論に現れる伝播関数に対応する線分と相互作用を表す交点を用いて描く．その際ループの数でグラフを分類し，ループの数が少ないものから順に計算を進める摂動計算を行う．

《Step2》 各々のグラフに対して，線分には対応する伝播関数を，交点に相互

作用の重みを与える．

《Step3》 各グラフに対応する確率振幅を決定する．運動量表示であれば，フーリエ変換で残っている運動量積分を実行する（各々のループに対して積分が生じる）．

《Step4》 同じ種類のグラフがいくつ出てくるかを勘定しその重みを乗ずる．これを「統計因子」という．

一般にはこのように計算を実行するとよいのであるが，一般論ではわかりにくいと思うので，以下で実スカラー場の ϕ^4 の相互作用を持つ理論で，1 ループまでの 2 点関数の計算をしてみよう．

まず《Step1》として 2 点関数のグラフを書いてみると図 1.10 のようになる．

次に《Step2》でそれぞれのグラフの線分（図 1.8 の左の線分）で運動量が k の線分には $i\tilde{M}^{-1}(k)=i/(-k^2+m^2)$ を対応させ，グラフの交点（図 1.8 の右の交点）には $-i\lambda/4!$ を対応させる．あとは《Step3》のフーリエ変換であらわれた運動量積分と《Step4》の統計因子を付ける．

例えば図 1.10 の左にあるループのないグラフには

$$\frac{i}{-p_1^2+m^2} \tag{1.114}$$

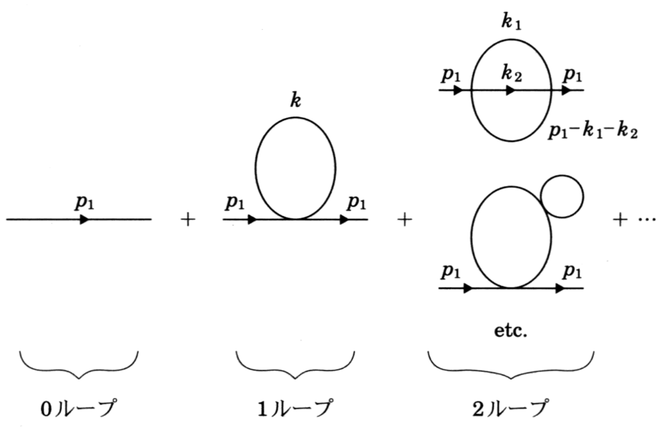


図 1.10　スカラー場の ϕ^4 理論の場合の 2 点関数のグラフ．

が対応する．図 1.10 の中央に描かれた 1 ループのグラフには

$$\frac{i}{-p_1^2+m^2}\left(-i\lambda\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{-k^2+m^2}\right)\frac{i}{-p_1^2+m^2} \tag{1.115}$$

が対応する．2 点関数の運動量表示では「運動量保存則」があるので，p_1 の運動量で始まると終わりも p_1 である．あとは (1.115) の中の積分 $\displaystyle\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{-k^2+m^2}$ を評価できれば，運動量表示の 2 点関数を摂動論で 1 ループまで評価できたことになる．

$$\langle\phi\phi\rangle(p_1)=(1.114)+(1.115)+O(\hbar^3)$$

しかし，$\displaystyle\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{-k^2+m^2}$ は運動量表示に移る前に出てきたときに放置していた発散項である．おおよそ

$$\int d^4k\frac{1}{k^2}\sim k^2 \tag{1.116}$$

であるから運動量が無限大のところで 2 次発散である．一般に場の理論では，ループに現れる積分をすると常にこういった無限大の困難が現れる．これを処理するのが次節で行われる「くりこみ」である．

1.6.4　くりこみ

この節では「くりこみ」について考察するが，これ以降の本書の内容の理解に絶対必要なわけではない．したがって急いで読み進めたい読者は，この節を読み飛ばすことができる．ただし,「有効作用」という重要な概念の基礎にこの節の「くりこみ」がある．その意味では是非チャレンジしてもらいたい内容でもある．

前節の (1.115) の中の発散する $\displaystyle\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{-k^2+m^2}$ をどうするかを考える．計算を実行するために，運動量を解析接続して複素数に広げると便利である．$1/(-k^2+m^2)$ の分母にはゼロ点を避けるために $-i\varepsilon$ を付けていたが，その極を横切らないように積分路を実軸から虚軸に 90 度回転することは容易だ．つまり運動量の成分をあらわに書くと $k=(k_0,k_1,k_2,k_3)$ であるから，$k_0=ik_0^E$ とすることでユークリッド計量で被積分関数 $1/(-k^2+m^2)$ を書けて

$$\frac{i}{-k^2+m^2}=\frac{i}{-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2+m^2}=\frac{i}{k_0^{E2}+k_1^2+k_2^2+k_3^2+m^2}=\frac{i}{k_E^2+m^2}$$

となる．ただし $k_E=(k_0^E,k_1,k_2,k_3)$ とした．このように積分路を 90 度回転させることをウィック回転という．

この積分を正則化して扱えるようにするため，運動量の上限（カットオフ）Λ を導入する．3 次元単位球殻の面積が $(2\pi)^2/2$ であることから

$$\int_{|k|\leq\Lambda}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k_E^2+m^2}=\int_0^\Lambda dk'\frac{2\pi^2}{(2\pi)^4}\frac{k'^3}{k'^2+m^2}$$

$$=\frac{1}{16\pi^2}\left(\Lambda^2-m^2\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)\right) \tag{1.117}$$

$$+O\left(\frac{m^4}{\Lambda^2}\right) \tag{1.118}$$

と積分が実行できる．ただし $k'=|k_E|$ とした．$\Lambda\to\infty$ で 2 次発散と対数発散を含む項を

$$\Sigma(m^2):=\frac{\lambda}{16\pi^2}\left(\Lambda^2-m^2\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)\right) \tag{1.119}$$

とおく．

2 点関数の 0 ループと 1 ループの寄与である図 1.10 の左と中央のグラフのみに注目したグラフが図 1.11 である．$\Lambda\to\infty$ で無視できる $O\left(\frac{m^4}{\Lambda^2}\right)$ を除いて，図 1.11 のグラフへの寄与は，(1.114) と (1.115) と (1.119) から

$$i\hbar\frac{1}{-p_1^2+m^2}+i\hbar^2\frac{1}{-p_1^2+m^2}\Sigma(m^2)\frac{1}{-p_1^2+m^2} \tag{1.120}$$

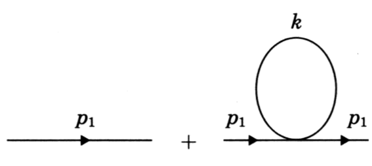


図 1.11　スカラー場の ϕ^4 理論の場合の 2 点関数の 1 ループまでのグラフ．

と書かれる．ここで $\hbar$ もあらわに書き表した．第 2 項が発散の原因となっているように見えるのだが，発想を転換して「発散するのは質量を間違えて設定してしまっている」からだと考えるのである．

くりこみ

n 点関数のファインマングラフを計算しているときに出てくる上のような発散項は，質量や結合定数，場の規格化定数などを間違って設定したために生じると考え，これらの定数を読み替えることを「くりこみ」と言う．それらの定数をずらすことで有限な n 点関数を得る処方のことである．

具体的に見るため，1 ループまでの 2 点関数 (1.115) をくりこみで処理してみよう．ここでは質量 m が正しい質量でないために発散が生じたと考えて「くりこみ」を行おう．くりこまれた質量 m_r を

$$m_r^2 = m^2 - \hbar\Sigma(m^2) \tag{1.121}$$

で導入して，これを新しく質量であると考える．実際，(1.121) より

$$\frac{1}{-p_1^2+m^2} = \frac{1}{-p_1^2+m_r^2} - \hbar\frac{1}{-p_1^2+m_r^2}\Sigma(m^2)\frac{1}{-p_1^2+m_r^2} + O(\hbar^2) \tag{1.122}$$

となるので，これを (1.115) に代入し $\hbar$ について展開すると

$$i\hbar\frac{1}{-p_1^2+m_r^2} + O(\hbar^3) \tag{1.123}$$

が得られる．1 ループまでの摂動を考えるならば，$O(\hbar^3)$ は次の次数なのでここでは無視する．そうすると，$\Lambda\to\infty$ で 2 点関数は有限なグリーン関数 $i\hbar\dfrac{1}{-p_1^2+m_r^2}$ で得られることになる．伝播関数の極が質量であると考えると，m_r が正しく質量を与えることもわかる．この質量の「くりこみ」はラグランジアンに次のような相殺項を付け加えたことに対応している．

$$L \longrightarrow L - \frac{1}{2}\Sigma(m^2)\phi^2 \tag{1.124}$$

ラグランジアンのパラメータの付け替えで発散をくりこめるということは，ラグランジアンに初めからある項と比べてパラメータだけ異なる相殺項をラグランジ

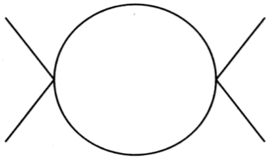


図 1.12　スカラー場の ϕ^4 理論の場合の 4 点関数の対数発散するグラフ.

アンに加えられることで発散が相殺するということだ.

スカラー場の ϕ^4 理論を 1 ループまで評価するには，他にも 4 点関数に発散するグラフがあることがわかる（図 1.12 参照）．このグラフの計算は実行しないが，ループの運動量積分は右の相互作用点と左の相互作用点を結ぶ二つのプロパゲーターから成る．すなわちグリーン関数二つを含むので，

$$\int_{|k|<\Lambda} d^4k \frac{1}{k^2+m^2} \frac{1}{(p-k)^2+m^2} \sim \log \Lambda \tag{1.125}$$

したがって発散項はおおよそ $\log \Lambda$ になることは理解されよう．こうして現れた対数発散も，今度は結合定数 λ が正しい結合定数ではないから生じたと考えることで，結合定数をずらしてくりこむことができる.

このように摂動展開（ループ展開）による量子補正の最初の項 (1 ループ）は「くりこみ」をすることで，有限に求めることができた．このような「くりこみ」の操作を展開の各次数で行っていくのである．全ての次数で「くりこむ」ことができる理論を「くりこみ可能」と呼ぶ．スカラー場の ϕ^4 理論の場合は 2 ループ以上のくりこみを考慮すると，波動関数の規格化定数の付け替えも必要となるが，本書ではその説明を省略する．結果として理論にあるパラメータを読み替えることで発散を除去することができるのであり，ϕ^4 理論はくりこみ可能な理論になっている.

くりこみ条件

スカラー場の ϕ^4 理論の質量のくりこみ (1.121) を行う場合，運動量が p_1 の粒子の質量が m_r で与えられるという条件でくりこみを行っていた．このような有限な部分を取り出すための条件を「くりこみ条件」という．しかし，無限大から

無限大を引いて有限を引き出し理論を定義するだけならば，くりこみ条件は無数に考えることができる．実際その違いでいろいろな有名な「くりこみ」が存在するが，ここでは特に紹介しない．重要なことは，くりこみ条件のバリエーションでさまざまな理論の記述方法はあるが，お互いに有限のくりこみで結ばれているということである．

くりこみ群

くりこみ条件の違いによるくりこまれた理論同士が，有限のくりこみで変換しあう．しかもその変換のもと群をなすことがわかる．この群を「くりこみ群」と呼ぶ．くりこみ条件を課す際に，どのようなエネルギースケールの外線に対して条件を付けるかも任意である．特に条件を付けるエネルギー μ（考えている物理系の有効なエネルギー領域で，先の例ならばくりこみ条件を設定した質量がこれに相当）を変化させたときに，相互作用の強さを表す結合定数 λ がどのように変化していくかを調べることは重要である．

ベータ関数 β を

$$\beta(\lambda)=\mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}=\frac{\partial\lambda}{\partial(\log\mu)} \tag{1.126}$$

で定義し，これを調べることで理論の相互作用が高エネルギーあるいは低エネルギーでどう変化していくかを観察することができる．定義から結合定数 $\lambda=0$ で $\beta=0$ であるが，その近傍で $\beta<0$ となる場合は「漸近自由」と呼ばれている．漸近自由ということは，エネルギー領域が高エネルギーに行くほど結合定数が小さくなり（つまり相互作用が起こりにくくなり），摂動計算も有効になってくるのである．

不確定性関係から「高エネルギー」ということと「近距離」であることは同じことなので，近距離であればあるほどお互いに相互作用しなくなるのである．例えば，2 粒子の相互作用が輪ゴムでつながれた関係である場合を連想するといいだろう．実際に非アーベル的 (nonabelian) なゲージ群を持つゲージ理論で「漸近自由」になっていることが知られており,「漸近自由」が後の章の双対性や位相的場の理論の解析で重要なヒントを与えた．

本書ではゲージ理論の摂動論の結果は導出せずに用いる．ゲージ理論の場合は，計算が非常に複雑で克服すべき問題が多くなるが，基本的にこの節で行ったスカラー場の場合と同様である．

1.6.5　ゲージ場の経路積分

前節まではスカラー場だけが存在し，ゲージ対称性が存在しない理論を考えた．ゲージ理論すなわち局所対称性のある理論で同様に経路積分による量子化を考えると，ゲージ群で移り変わる無限のコピーを経路積分で足し上げることになり，発散の困難を引き起こす[26]．デルタ関数を使ってゲージパラメータの切断を一つ決めることで，その困難は取り除かれる．つまり主束のファイバーの座標をデルタ関数で 1 点に制限するのだ．こうして無限大を取り除く処方を「**ゲージ固定**」という．以下具体的に見ていく．ゲージ場の作用が $-\int d\ 4x\mathrm{tr}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ であるので，素朴には経路積分は $\int\mathcal{D}A_\mu\exp\left(-\int d^4x\mathrm{tr}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\cdots\right)$ である．しかしこれは無限大なので，以下のようにゲージ固定する．

$$\begin{aligned}&\int\mathcal{D}A_\mu\exp\left(-\int d^4x\mathrm{tr}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\cdots\right)\\&\longrightarrow\frac{1}{volG}\int\mathcal{D}A_\mu\exp\left(-\int d^4x\mathrm{tr}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\cdots\right)\\&\sim\int\mathcal{D}A_\mu\prod\delta(\theta(x)-\theta_0(x))\exp\left(-\int d^4x\mathrm{tr}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\cdots\right)\end{aligned}\tag{1.127}$$

ここで，$volG$ はゲージ変換群のボリュームで，$\theta(x)$ はリー代数に値を持つゲージパラメータ（主束の点 x 上のファイバー方向のパラメータ．より正確にはその接空間のパラメータ）とする．デルタ関数 $\delta(\theta(x)-\theta_0(x))$ の挿入で経路積分で生じる不要な $volG$ を割る働きをさせた（ゲージ場 A_μ やゲージパラメータ θ はリー代数に値をとり，その基底を T^a で書くと $A_\mu=A_{\mu a}T^a$, $\theta=\theta_aT^a$ と表されるものであった）．

しかし主束のファイバーの座標は力学変数ではないので直接制限をつけるのは

---

[26] ゲージ理論では，経路積分の積分測度もゲージ不変でなければ量子化した理論がゲージ不変性を持たなくなってしまう．量子論でもゲージ対称性を持つように，ハール測度を用いて経路積分測度が定義される．

解析が難しい．そこで実際には「ゲージ条件（ゲージ固定条件）」と呼ばれる A_μ に対する条件を要請する．ゲージ条件を $f(A)=0$（例えばファインマンゲージと呼ばれる $f(A)=\partial_\mu A^\mu=0$ などがよく用いられるゲージ条件である）とすると，主束のファイバーの座標の添字もあらわに書いてデルタ関数の変数変換を行い

$$\prod\delta(\theta^a-\theta_0^a)=\prod\delta(f^b(A))\ \det\frac{\delta f^b(A)}{\delta\theta^a} \tag{1.128}$$

と書き直すことができる．ここで $\dfrac{\delta f(A)}{\delta\theta}=D_\mu\theta\dfrac{\delta f}{\delta A_\mu}$ は f のゲージ変換である[27]．これらを付けるプロセスがゲージ固定と呼ばれる．

ゲージ固定は,「元の作用にゲージ固定のための作用をつけ加える」ことでも達成できる．そのようなゲージ固定のために加えられる作用 S_{GaugeFix} は，ボゾニックな補助場 b^a とフェルミオニックな場 c^a,$\bar{c}^a$ を用いて

$$\begin{aligned} S'&=-\int d^4x\,\mathrm{tr}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\cdots+S_{\text{GaugeFix}} \\ S_{\text{GaugeFix}}&=\int ib^a(\alpha b+f(A))^a+i\bar{c}^a(\delta_c f(A))^a \end{aligned} \tag{1.129}$$

と書ける．ただし α は適当なパラメータである．$c(x)$ はゲージパラメータであった $\theta(x)$ を力学変数である場と思い直し，さらにボゾニック（グラスマン偶）だったものをフェルミオニック（グラスマン奇）に変更したものである．b はローレンツ変換性などの全ての変換性がゲージ条件の f と同じであるボゾニックな場であり，b をフェルミオニックに変更した場が $\bar{c}$ である．これらは新しく「力学変数の場」として導入されたため，経路積分 $\int\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}b$ も実行しなくてはいけないので，それらも付け加える．δ_c は $c(x)$ をパラメータとしてゲージ変換することを意味する．例えばゲージ場（ゲージ接続）に対しては，ゲージ共変微分 D^μ を用いて $\delta_c A^\mu=D^\mu c$ である．他のゲージ変換を受ける場も，ゲージ群の表現にあわせて適時適当なゲージ変換を表しているものとする．

実際 $\alpha=0$ のとき（理論が α によらないことは後で簡単にわかる），b の経路

---

[27] ここでは f はゲージ場の関数としているが，より一般には，ゲージ変換が自明でない場ならば他の場の関数を採用してもよい．

積分 $\int \mathcal{D}b \exp \int ib^a f^a$ で (1.128) のデルタ関数 $\delta(f(A))$ が現れ，$c,\bar{c}$ のフェルミオニックな経路積分 $\int \mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}^a \exp \int i\bar{c}^a(\delta_c f)^a$ で行列式 $\det \dfrac{\delta f(A)}{\delta\theta}$ が出る．このことから「S_{GaugeFix} を作用に加え $b,c,\bar{c}$ を新しく場とすること」と上の「ゲージ固定 (1.128)」が一致することが理解されるだろう．行列式 $\det \dfrac{\delta f(A)}{\delta\theta}$ をファデーェフ-ポポフ行列式 (L.D. Fadeev, V.N. Popov) と呼び $c,\bar{c}$ を**ゴースト，反ゴースト**という．

結局，(1.128) で「行列式が**分母ではなく正冪**で現れた」ので，それをゲージ固定の作用で表現するために，フェルミオニックなゴースト場 $c,\bar{c}$ をもちいなくては行列式を作用として取り込むことができなかったのである（グラスマン数のガウス積分 (1.88) 参照）．

BRST 量子化（あるいは BRS 量子化）

このゲージ固定をシステマティックに行う「BRS 量子化」と呼ばれる方法を与えよう．初めに **BRS 対称性**を以下のような手順で導入する．

（1） ゲージパラメータ θ を，フェルミオニックな場である c ゴーストにする．

（2） そうすることで局所的対称性であったゲージ対称性の替わりに大局的な対称性 (BRS 対称性）が生じる．通常のコンパクトリー群がゲージ群の場合の BRS 対称性を生成する変換は，次のように定義される．

$$\hat{\delta}A_\mu = D_\mu c, \qquad \hat{\delta}c = \frac{i}{2}[c,c], \qquad \hat{\delta}\bar{c} = ib, \qquad \hat{\delta}b = 0 \tag{1.130}$$

ここで BRS 対称性の生成子を $\hat{\delta}$ と書き，BRS 作用素 (BRS 演算子）と呼ぶ．**冪零** $\hat{\delta}^2 = 0$ であることに注意されたし．

（3） この BRS 演算子を用いてゲージ固定は BRS-完全 (exact) な項を付け加えるとよい．具体的には

$$\begin{aligned} S_{\text{GaugeFix}} &= \int \hat{\delta}(\bar{c}(f(A) + \alpha b)) \\ &= \int ib^a(\alpha b + f(A))^a + i\bar{c}^a(\delta_c f(A))^a \end{aligned} \tag{1.131}$$

とすると自動的にゲージ固定が行われることになる．これは，前述のゲージ固定作用 (1.129) とこのゲージ固定作用が同じものであることからわかる．

もともと存在するゲージ対称性から出発しているので，自動的に作用は BRS 対称性を持っていることは重要だ．こうしてゲージ固定の手続きが洗練された．しかし BRS 量子化には，以下で見るように単なるゲージ固定以上の様々な側面をそなえている．

BRS 対称性の性質

（1） 任意の局所対称性に対して BRS 対称性は定義可．

ゲージ変換のパラメータをゴーストと呼ぶ場に格上げしたのだから，ゲージ対称性があれば必ず BRS 対称性が存在する．しかも，その作り方はゲージ群の種類や場の変換性に全く依存しないので，任意の局所的ゲージ対称性に対して BRS 対称性が存在する．

例 1.14 位相的場の理論では，$A_\mu \to \psi_\mu$ という任意の局所変形に対応する変換に対して，BRS 変換を定義しそれが重要な役割を果たす．

（2） BRS 変換が定義されるとゴースト数という一種のスケーリングの対称性が生じ，**BRS 作用素はゴースト数 1** を持つ．反ゴースト場 $\bar{c}$ のゴースト数を -1, ゲージ場を A_μ を 0 として，それらの BRS 変換はゴースト数が 1 増える．

$$
\begin{array}{rccccc}
 & \bar{c} & \longrightarrow & b, A_\mu & \longrightarrow & c \\
\text{ゴースト数} & -1 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 1
\end{array}
$$

（3） BRS 対称性は量子論におけるゲージ対称性なので，観測値は BRS 不変でなければならない．つまり，作用 S と経路積分測度が BRS 不変であることが理論の大前提である．この場合，観測量 θ の期待値 $\langle\theta\rangle$ が $\hat{\delta}$ で $\langle\theta\rangle + \langle\hat{\delta}\theta\rangle$ と変化したならば，$\langle\hat{\delta}\theta\rangle = 0$ である．

（4） BRS 変換は大局的な変換で，理論の物理状態を定義する対称性である．BRS 変換の生成子はネーターの定理を用いて保存電荷を使い書くことができる．

（5） BRS 作用素は冪零，すなわちゲージ変換群のリー代数コホモロジーを定めており，無限次元に拡張された外微分作用素と見てとることができる．(3) で述べた $\langle\hat{\delta}\theta\rangle=0$ は全微分の積分がゼロ $\left(\int df=0\right)$ の式に類似である．この点に関しては位相的場の理論の章でさらに詳しく議論する．

こうして，BRS 対称性を導入し，局所的な対称性を大局的対称性に格上げすることでゲージ固定をシステマティックに行うことができる．局所的な対称性（ゲージ対称性）を持つ理論は，正しくゲージ固定されて初めて量子化されたと言える．

1.6.6 分配関数

観測量が 1 のとき，その期待値は「**分配関数**」と呼ばれる[28)]．

$$Z\equiv\langle 1\rangle=\int\mathcal{D}\phi_i e^{-S(\phi_i)} \tag{1.132}$$

これはもともと状態数を数え上げる統計力学の分配関数と対応付けられるもので，正準量子化の形で作用素を用いて書くと

$$Z=\sum_n\langle n|e^{iHt}|n\rangle \tag{1.133}$$

と定義できる量と対応関係がある[29)]．ただし $|n\rangle$ は完全系をなすベクトルとした．

ボゾン弦の分配関数

(1.133) の分配関数の話が出たついでに，具体的な例として後で使うボゾン弦の分配関数を求めてみる．ここでの計算は経路積分ではなく，作用素を用いた正準形式の場の理論の方法で行う．前に見たように弦理論を正準量子化すると，無限個の生成消滅演算子 $(a^\dagger_{\mu,n},a_{\mu,n}(\mu=1\sim D))$ が現れた．D は力学的自由度（調

[28)] 分配関数の経路積分表示における始状態と終状態についてはここでは解説しないが，$t=-\infty$ から $t=\infty$ での基底状態の遷移を表している．経路積分における完全系と始状態や終状態に関しては，詳しくは参考書を参照されたい．

[29)] この対応関係を見るうえでも経路積分の始状態と終状態に関して議論する必要があるが，ここでは，深入りしないことにする．ボルツマン定数 β とは $t\to i\beta$ とし，解析接続でつながる．

和振動子の数）であるが，今は簡略のため D を省略して 1 自由度で計算し，後で多自由度の場合に書き直す．ハミルトニアンはあるゲージ固定のもと個数演算子の形で

$$H=\sum_{n=1}^{\infty} na_n^{\dagger}a_n \tag{1.134}$$

の形で与えられるものとする．(1.41) の本質的な部分である調和振動子について見ているものである．弦理論のゲージ固定の話を省略するために多少の議論のギャップがあるのだが，気になる場合は巻末に挙げた弦理論の参考文献を参照されたし．ヒルベルト空間の完全系は

$$|N_i\rangle=a_1^{\dagger k_1}\cdots a_m^{\dagger k_m}|0\rangle \tag{1.135}$$

で与えられ，ハミルトニアン H の固有値は

$$N_i=\sum_n nk_n \tag{1.136}$$

である．$x=e^{-it}$ とすると分配関数は

$$\begin{aligned} Z&=\sum\langle N_i|x^H|N_i\rangle \\ &=\sum_{N=1}^{\infty} x^N P(N) \end{aligned} \tag{1.137}$$

ここで $P(N)$ は N の分配数で（全ての $N=\sum_n nk_n$ となる分け方の数で），クロネッカーの δ を使い

$$P(N)=\sum_{\{k_n\}}\delta_{N,\sum nk_n} \tag{1.138}$$

と書ける．ところでコーシーの積分定理より

$$\begin{aligned} P(N)&=\sum_{\{k_n\}}\frac{1}{2\pi i}\oint x^{\sum nk_n-N-1}dx \\ &=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dx}{x^{N+1}}\sum_{\{k_n\}}\prod_n x^{nk_n} \end{aligned} \tag{1.139}$$

また，この積分のなかでは，分割の集合 $\{k_n\}$ の和から，単なる k_n の和になおす変更

$$\sum_{\{k_n\}}\prod_n x^{nk_n} \Longleftrightarrow \prod_n\sum_{k_n} x^{nk_n} \tag{1.140}$$

を行っても積分は変わらないので

$$P(N)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dx}{x^{N+1}}\prod_n\sum_{k_n}x^{nk_n} \tag{1.141}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dx}{x^{N+1}}\prod_n\frac{1}{1-x^n} \tag{1.142}$$

となる．ここで一般に $f(x)=\sum_n a_n x^n$ ならば

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint f(x)\frac{1}{x^{n+1}} \tag{1.143}$$

であることから，分配関数が

$$Z=\sum_{N=1}^{\infty}x^N P(N)=\prod_n\frac{1}{1-x^n} \tag{1.144}$$

と求まる．今の計算は添字の μ を省略して物理的自由度を 1 としていた．物理的自由度とは調和振動の起こる方向の数のことである．一般の物理的自由度 D の場合には

$$Z=\prod_n\left(\frac{1}{1-x^n}\right)^D \tag{1.145}$$

となる．ボゾンの場合，時空の次元と物理的自由度 D は時空の次元より 2 少ないことが知られている．これはゲージ対称性の分は物理的な自由度ではないことに対応している．したがってボゾン的弦の場合なら，矛盾なく定義される次元が 26 次元だったので，物理的自由度 D は 24 ということになる．

1.6.7 アノマリー

量子化特有の概念として,「量子異常」（アノマリー）がある．古典理論では作用がある変換に関して不変であれば，対称性が存在するという．しかし古典作用が不変でも経路積分の積分測度が不変ではないとすると，理論は不変にはならない．このように，**古典理論で成立する対称性を量子論で破る現象を「アノマリー」という．**

破れてもいい対称性と破れては困る対称性があるので，量子化する際に破れてはいけない対称性を優先して経路積分の積分測度を選ぶ．そのため，両立しない対称性が破れてしまう．例えば，ゲージ対称性は「繰り込み」をする上で必要な対称性なので破れないようにする必要がある．また，スピン多様体上に定義されたゲージ場とスピノル場の作用は，カイラリティー変換に対して不変であるが積分測度が不変ではなく，その変換におけるヤコビアンとしてポントリャーギン類の多項式が現れる．これがアノマリーである．しかもディラック作用素のフレドホルム指数 (E.I. Fredholm) としても計算可能であることから，経路積分を用いたアティヤ-シンガー指数定理 (M. Atiyah, I. Singer) の証明にもなっている．この事実はいろいろな教科書（例えば [1], [2] を参照）に書かれているので，ここでは詳しく計算することはやめる．

1.7　超対称理論

今までは，場の理論全般において必要最低限の基礎知識の整理をしてきた．この章で学ぶ超対称性ゲージ理論は，双対性や位相的場の理論に深く関係する．また最初に超対称性について述べた部分に書いたように，現実の物理としてもおそらく超対称性は実現されていると考えられている．今回はかなり詳しく超対称理論について学ぶことにする．

まず初めに，対称性が物理的要請から制限を受けることがコールマン-マンデューロの定理 (S. Coleman, J. Mandula) として知られているので，その事実を確認しておこう．ただし定理の前提の条件を正確に記述すると遠回りになるので，それを知りたい読者は参考文献 [13] などを当たってもらうことにする．

コールマン-マンデューロの定理

「物理的に妥当な要請から，グラスマン偶な変換で書かれる対称性は「ポアンカレ対称性 (H. Poincare)（並進とローレンツ変換の下での対称性）」と「ゲージ対称性（内部対称性）」しかない」

この定理から，他の対称性があるとしたら，グラスマン奇な（あるいは別の言

葉で言うと超リー群で書かれる）対称性でなければいけない．それがすなわち「超対称性」である．しかもポアンカレ対称性と両立することと物理的な要請から，超対称な代数もほとんど決まる．

超対称性変換の数によって超対称理論は区別される．$\mathcal{N}=1$（あるいは $\mathcal{N}=1$ SUSY) とは超対称性が一つ（超対称変換を引き起こすスピノルの生成子が一組）という意味でその詳しい意味は以下の解説で明らかになる．$\mathcal{N}=1$ のときはセントラルチャージがないから SUSY（超対称性）が簡単である（以下の超場，超空間での定式化が簡単ということだ）．それを見た後で双対性や位相的場の理論に直接かかわる $\mathcal{N}=2$, つまり超対称性が 2 組の場合について述べる．

この章で用いるノーテーションをここでまとめておく．教科書によって異なる場合があるので，具体的な計算をする場合には注意が必要でやっかいな問題であるが，文献 [13] にしたがう場合が多いので，ここでもそれに従うことにする．

この章の表記とスカラー，ベクトル，反対称テンソル

ミンコフスキー計量の場合

4 次元ミンコフスキー空間を考えたとき，計量は対角に (−1,1,1,1) とし 4 階完全反対称テンソルは $\varepsilon^{0123}=-\varepsilon_{0123}=1$ で符号をつけることにする．4 次元ミンコフスキー空間の接ベクトルの添字が $\mu,\nu,\cdots$ でスピノルの添字が $\alpha,\beta,\cdots$ であることは，本書の共通事項であるが再度確認しておく．

ローレンツ群 $SO(3,1)\simeq SL(2,\mathbb{C})$ の基本表現 **2** のスピノルを ξ_α とし，その $SL(2,\mathbb{C})$ 変換を $a_\alpha{}^\beta\xi_\beta$, $(a\in SL(2,\mathbb{C}))$, とする．$\mathbf{2}^*$ のスピノルを点付きの添字を用いて $\bar{\eta}_{\dot\alpha}$ と書く[30]．$SL(2,\mathbb{C})$ 不変テンソルである 2 階反対称テンソル

$$\varepsilon^{\alpha\beta}=\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}=\begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\qquad \varepsilon_{\alpha\beta}=\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.146}$$

($\varepsilon^{\alpha\beta}=-\varepsilon_{\alpha\beta}$ であることに注意）を使って，添字の上げ下げを

$$\xi^\alpha=\varepsilon^{\alpha\beta}\xi_\beta,\qquad \xi_\alpha=\varepsilon_{\alpha\beta}\xi^\beta,\qquad \bar\eta^{\dot\alpha}=\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\bar\eta_{\dot\beta},\qquad \bar\eta_{\dot\alpha}=\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\eta^{\dot\beta} \tag{1.147}$$

で行う．したがって添字が上についているか下についているかによって，値が全

---

[30] **2** および $\mathbf{2}^*$ は，物理学者がよく用いる記法で，$\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 表現と $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 表現のことである．

然違ってくることに注意する必要がある．上付きと下付きの ε テンソルは互いに逆行列であることも注意せよ．

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}=\delta^{\alpha}_{\gamma}, \qquad \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}=\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\gamma}} \tag{1.148}$$

これによってローレンツ変換に対してスカラー量は二つの 2 成分スピノル ξ,Ξ または $\bar{\xi},\bar{\Xi}$ の内積から

$$\xi\Xi\equiv\xi^{\alpha}\Xi_{\alpha}=\varepsilon^{\alpha\beta}\xi_{\beta}\Xi_{\alpha}, \qquad \bar{\xi}\bar{\Xi}\equiv\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{\Xi}^{\dot{\alpha}}=\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{\Xi}_{\dot{\beta}} \tag{1.149}$$

で得られる．ちなみにローレンツ変換に対するベクトルは，パウリ行列を使って

$$V_{\alpha\dot{\beta}}=V^{\mu}(\sigma_{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}$$

と書かれ，自己双対テンソルが

$$F_{\alpha\beta}=(\sigma^{\mu\nu}\varepsilon)_{\alpha\beta}F^{+}_{\mu\nu}$$

と表されることも重要である．ただし $(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta}=\frac{1}{4}(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}-\sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu})_{\alpha}{}^{\beta}$ とした．ε で添字を下げて $(\sigma^{\mu\nu}\varepsilon)_{\alpha\beta}$ としたものは，$\alpha\beta$ に対して対称行列になっている．$(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}=\frac{1}{4}(\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}-\bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}$ とすると，こちらは反自己双対 2 形式と対応する．

ユークリッド計量の場合

ユークリッド計量の場合は，$SO(4)\simeq SU(2)\times SU(2)$ であるのでそれぞれの $SU(2)$ に対して独立にスピノルが定義される．それを区別するために $SO(4)\simeq SU(2)_L\times SU(2)_R$ とし，$SU(2)_L$ に対応するスピノルを点なしスピノルで表し，$SU(2)_R$ に対応するスピノルを点付スピノルで表す．ミンコフスキー空間の場合と異なり，これらは全く独立なスピノルである．ユークリッド計量における σ^{μ} の定義に関しても若干注意が必要で，この本では σ^{μ} $(\mu=1,2,3,4)$ に対して

$$\begin{aligned}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}&=(\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3,\sigma^4)=(i\mathbf{1},\ -\vec{\tau})\\ (\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha}&=(\bar{\sigma}^1,\bar{\sigma}^2,\bar{\sigma}^3,\bar{\sigma}^4)=(i\mathbf{1},\ +\vec{\tau})\end{aligned} \tag{1.150}$$

とする．ただし

$$\vec{\tau}=\left(\begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \tag{1.151}$$

で定義している．文献によっては σ^μ の順序を $(\mu=4,1,2,3)$ とすることで通常のパウリ行列の 3 成分と空間 3 成分の番号がずれないようにしている場合もあり，本質的ではないが微妙な違いが生じている場合があるので注意が必要だ．ミンコフスキー計量の場合と同様に，$SU(2)$ 不変テンソルである反対称テンソル ε で添字の上げ下げと内積を定義する．

$$\begin{aligned} \psi^\alpha&=\varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta, \qquad \psi_\alpha=\varepsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta \\ \psi^{\dot\alpha}&=\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\psi_{\dot\beta}, \qquad \psi_{\dot\alpha}=\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\psi^{\dot\beta} \end{aligned} \tag{1.152}$$

また $\sigma^{\mu\nu}$,$\bar\sigma^{\mu\nu}$ として

$$\begin{aligned} (\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta&=\frac{i}{4}(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu-\sigma^\nu\bar\sigma^\mu)_\alpha{}^\beta \\ (\bar\sigma^{\mu\nu})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}&=\frac{i}{4}(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu-\bar\sigma^\nu\sigma^\mu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \end{aligned} \tag{1.153}$$

で定義する．ミンコフスキー計量の場合と自己双対と反自己双対の役割が入れ替わって

$$\sigma^{\mu\nu}=-*\sigma^{\mu\nu}, \qquad \bar\sigma^{\mu\nu}=+*\bar\sigma^{\mu\nu} \tag{1.154}$$

となる．これも μ の順序を (4,1,2,3) ではなく (1,2,3,4) としている影響である．

最後に，後の章で使うスピノルの † 記号についてもここで定義しておく．通常は † はエルミート共役を意味しているが，スピノルの場合は添字の位置にも注意しなくてはいけない．つまり $\psi_\alpha{}^\dagger$ と $\psi_{\dot\alpha}{}^\dagger$ は

$$\psi_\alpha{}^\dagger=\varepsilon^{\alpha\beta}\bar\psi^t_\beta, \qquad \psi_{\dot\alpha}{}^\dagger=\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\bar\psi^t_{\dot\beta} \tag{1.155}$$

とする．ここで t は転置を表している．

以上の記法にしたがうと，一応はスピノルの計算を含めて以下の計算をフォローすることはできる．しかし，この手の計算に不慣れな読者には最初は真剣にスピノルの計算をトレースすることはお勧めしない．というのは，符号などは間違え易い上に，かなり多くの公式を用意しておかなければ式変形が容易ではない

からだ．こういった計算は技術的な問題であり，本質的な問題ではないのでおおらかに読み進めることをお勧めする．むしろ以下の章を読み進めていく上で重要になるのは，点付スピノルと点なしスピノルの組が $(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}$ を通してベクトルと 1 対 1 で対応することや，点付スピノル二つの組は $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$ と ε を通して（反）自己双対 2 形式とスカラーに分解（つまり対称部分が（反）自己双対 2 形式で反対称部分がスカラーに分解）されることなどに留意することである．

1.7.1　$\mathcal{N}=1$ 超対称性ゲージ理論

超対称生成子がスピノルであるから，通常の意味での超対称性はスピン多様体上で考える概念である．ポアンカレ代数を超ポアンカレ代数に拡張をして超対称性を定義するのが最も自然な定式化と思われるが，局所的にしか定義できない多様体で定式化すると超重力の理論を扱うことになり面倒である．したがって当面は 4 次元ミンコフスキー空間（あるいは 4 次元ユークリッド空間）上で考えることにする．

相対論的な場 $\phi(x)$ はポアンカレ群（つまりローレンツ回転と並進群をあわせたもので，ユークリッド空間の場合はローレンツ回転群の代わりに回転群であるとする）の表現であったので，

$$e^{+iP_\mu a^\mu}\phi(x)e^{-iP_\mu a^\mu}=\phi(x+a) \tag{1.156}$$

$$e^{-i\varepsilon^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}\phi(x)e^{i\varepsilon^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}=D(\Lambda)\phi(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu) \tag{1.157}$$

と変換される．ただし P_μ は並進の生成子であり，$M_{\mu\nu}$ は回転の生成子で，$\Lambda^\mu{}_\nu$ は回転群の元であるとする．$D(\Lambda)$ は ϕ の表現空間に対応する Λ の表現行列である．相対論的場の理論はポアンカレ群の対称性を持つので，作用はこの変換のもと不変でなければならない．

さらにゲージ対称性以外の対称性が存在するならば，コールマン-マンデューロの定理より，超リー群への拡張を考えざるを得ない．つまりフェルミオン的（グラスマン奇）な対称性に拡張する必要がある．その自然な方法としてボゾニックな空間のほかに，フェルミオニックな座標を持つ空間も含むような空間に拡張する方法がある．それを超空間と呼ぶ（正確には超ミンコフスキー空間あるいは超ユークリッド空間であるが一般に単に超空間と呼ばれている）．以下にいくつか

の定義を列挙する.

超ミンコフスキー（またはユークリッド）空間

時空の座標 x と，形式的に書かれたワイル（またはマヨラナ）スピノルの座標 $\theta,\bar{\theta}$ で張られる空間を超空間と呼ぶ．4 次元時空なら θ は 2 成分だったことを思い出さなければならない[31]．

超場

ボゾニックな座標 x とフェルミオニックな座標 θ に依存する超空間上の場であり，以下で定義される超対称ポアンカレ群の表現になっている場を「超場」と呼ぶ．$\Phi(x,\theta,\bar{\theta})$ と書く．

ポアンカレ代数から超対称ポアンカレ代数への拡張は以下のような代数を通常のポアンカレ代数に加えることで得られる．

$$\{Q_\alpha,Q_\beta\}=\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}},\bar{Q}_{\dot{\beta}}\}=0 \tag{1.158}$$

$$\{Q_\alpha,\bar{Q}_{\dot{\beta}}\}=-2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}P_\mu=2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu \tag{1.159}$$

$$[P_\mu,Q_\alpha]=[P_\mu,\bar{Q}_{\dot{\alpha}}]=0 \tag{1.160}$$

$$[M_{\mu\nu},Q_\alpha]=-(i\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta \tag{1.161}$$

$$[M_{\mu\nu},\bar{Q}^{\dot{\alpha}}]=-(i\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}} \tag{1.162}$$

ここで，Q_α , $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ は超空間上の平行移動の生成子であり，

$$Q_\alpha=\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}-i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_\mu \tag{1.163}$$

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}}=-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}+i\theta^\beta\sigma^\mu_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu$$

とすると上の代数を満たし，θ 方向の生成子になっている．この代数で定義された Q で生成される超対称変換で不変な理論を「超対称な理論」と呼ぶ．超対称性は大域的対称性であるから，超対称性を持つ理論はネーターの定理 (1.5.1 節)

---

[31] 超多様体の定義は例えば [15] を参照.

により生成子 Q を作用から作れることも重要である．

超場 $\Phi(x,\theta,\bar{\theta})$ は超対称ポアンカレ群の表現なので

$$e^{i(P_\mu a^\mu+\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q})}\ \Phi(x,\theta,\bar{\theta})e^{-i(P_\mu a^\mu+\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q})}$$
$$=\Phi(x^\mu+a^\mu+i\theta\sigma^\mu\bar{\xi}-i\xi\sigma^\mu\bar{\theta},\ \theta+\xi,\ \bar{\theta}+\bar{\xi}) \qquad (1.164)$$

と書ける[32]．複素スカラーな超場を考え，それをスピノル座標で展開する．

$$\Phi(x,\theta,\bar{\theta})=f(x)+\theta\psi+\bar{\theta}\bar{\chi}+\cdots \qquad (1.165)$$

展開係数の場はボゾニックスカラー場 $f(x)$, フェルミオニックなワイルスピノル（点なしスピノル）ψ, フェルミオニックなワイルスピノル（点付スピノル）$\bar{\chi}$, などなど，様々な種類の場が一つの超場のなかに含まれるのがわかる．θ は 2 成分でグラスマン奇な量なので，同じもの同士の積は 0, $\theta_\alpha\theta_\alpha=0$ であることに注意すれば，最高で 4 次の $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}=\varepsilon^{\alpha\beta}\theta_\beta\theta_\alpha\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ までの展開で有限で終わることに注意されたし．

この超場で場の理論を作ればいいかといえば問題がある．超対称変換の既約表現にならないのである．つまりより少ない場で超対称代数が閉じた理論が作れるのである．既約表現を作るには超場に制限を加えて場の自由度を減らしてやればよい．その方法はいろいろあるが，カイラル超場の方法とベクトル超場の方法が最もよく知られ，よく用いられるのでそれらについて学ぶことにする．既約表現を作るためにはフェルミオニックな微分作用素

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}+i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_\mu \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}+i\theta^\beta\sigma^\mu_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu \end{aligned} \qquad (1.166)$$

を用いる．これらの微分作用素は $Q_\alpha,\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ と二つの微分の相対符号だけが異なる．そのため

---

[32] 生成子と微分演算子を区別しないで記述しているので注意しておこう．$P_\mu=-i\partial_\mu, Q_\alpha$ と $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ として (1.163) の微分演算子とし，場を作用素と扱わないなら

$$e^{i(P_\mu a^\mu+\xi Q+\bar{\xi}Q)}\Phi(x,\theta,\bar{\theta})=\Phi(x^\mu+a^\mu+i\theta\sigma^\mu\bar{\xi}-i\xi\sigma^\mu\bar{\theta},\theta+\xi,\bar{\theta}+\bar{\xi})$$

と通常のテーラー展開に近い形で書かれる．

$$\{Q_\alpha, D_\beta\} = \{Q_\alpha, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, D_\beta\} = \{Q_\alpha, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0$$

が成立することに注意せよ．

ここでグラスマン奇なスピノルの微分と積分について再びまとめておく．グラスマン奇な量の微分演算子も外微分作用素同様，反交換な微分演算子で

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\theta^\beta = \delta^{\alpha\beta} \tag{1.167}$$

で定義する．それに対しベレジンによって与えられた積分（ベレジン積分）の定義はいささか奇妙であるが，微分と同じで

$$\int d\theta^\alpha\,\theta^\beta = \delta^{\alpha\beta} \tag{1.168}$$

で与えられる．これは積分の並進不変性の要請から得られる．特に2次積分の積分測度 $d^2\theta$ をスカラー $\theta\theta = \theta^\alpha\theta_\alpha$ を積分して1になるように定義する．

$$\int d^2\theta\ \theta\theta = 1 \tag{1.169}$$

この表記のもとで超対称な理論を構成する準備を進めよう．

カイラル超場

カイラル超場 Φ を導入しよう．以下の拘束条件を満たす超場をカイラル超場と呼ぶ．

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \tag{1.170}$$

この拘束条件で場の数を減らしているのである（同様に反カイラル超場 $\bar{\Phi}$ を $D_\alpha\bar{\Phi} = 0$ で定義する）．(1.170) は，カイラル座標と呼ばれる $y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$ を用いて簡単に解ける．つまり $\bar{D}_{\dot{\alpha}}y = 0$ であるから，y, θ にだけ依存する超場

$$\Phi(y,\theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) - \theta\theta f(y) \tag{1.171}$$

は自動的に上の (1.170) を満たし，カイラル超場になっていることは明らかだろう．別の言い方をすると，$(x,\theta,\bar{\theta})$ から $(y,\theta,\bar{\theta})$ に座標変換するとカイラル超場は $\bar{\theta}$ の座標に依存しないとも言える．そのためカイラル座標では，フェルミオニックな座標での展開は θ での展開のみであるから，θ は2成分なので2次が最高次

となり，展開が (1.171) のように 2 次で止まっている．

それぞれの場の超対称変換を求めるために，このカイラル超場を元の座標 $(x,\theta,\bar{\theta})$ に戻して再度展開してみよう．

$$\Phi(y,\theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) - \theta\theta f(y) \tag{1.172}$$

$$= \phi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi(x) - \theta\theta f(x) \tag{1.173}$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^2\phi(x) \tag{1.174}$$

ただし最後の行の $-\frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar{\theta}$ を導出するために，スピノルのスカラー積の組み換え公式

$$(\theta\psi)(\theta\psi') = -\frac{1}{2}(\psi\psi')(\theta\theta)$$

を用いている．ここで現れた場は，複素スカラー場 ϕ, ワイルフェルミオン ψ, および補助場 f である（場の理論では補助場とは運動項のない場で，ガウス積分を実行することで消してしまえる場を意味する．実際に後でラグランジアンを見ると f は補助場であることがわかる）．ξ を無限小反交換パラメータとする超対称変換を $\delta = i(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})$ とし，$\delta\Phi = \delta\phi + \sqrt{2}\theta\delta\psi(y) - \theta\theta\delta f(y)$ と (1.163) の定義を使って $i(\xi^\alpha Q_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}})\Phi$ を計算したものを θ $\bar{\theta}$ の展開の各次数で比べると，以下のようにそれぞれの場の超対称変換が定義されなければならないことがわかる．

$$\delta\phi = \sqrt{2}\xi\psi, \quad \delta\psi = \sqrt{2}i\partial_\mu\phi\sigma^\mu\bar{\xi} - \sqrt{2}f\xi, \quad \delta f = \sqrt{2}i\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\xi} \tag{1.175}$$

注意　f の変換が全微分であることに注意が必要だ．このことは以下のように理解できる．超対称代数を見るとわかるように $Q\bar{Q}\sim\partial_\mu$ であるから，Q（つまり超対称変換）が 1/2 の運動量 (x 微分) の次元を持っている．逆にスピノルの座標やパラメータ ξ などは二つの組で通常の x 座標と同じ役割を果たすので，$-1/2$ の次元を持っている．したがって (1.171) の ϕ,ψ,f の次元は順に 1/2 づつ増えている．f の超対称変換は，ある A,B を用いて $\delta f = \xi A + \bar{\xi}B$ と書かれるので，A,B の次元は f より 1/2 大きいことになる．f はフェルミオニック座標の最高次 $\theta\theta$ の係数であるから，より高い次元の場が存在しないので，$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$ によってよ

り高いフェルミオニック座標の冪の係数から超対称変換をおろしてくることはできない（$\delta\phi$ では $\dfrac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$ で θ の係数 ψ を，$\delta\psi$ では $\dfrac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$ で $\theta\theta$ の係数の f を拾ってこれたのであるのに対して，f だけはそのような対象がないということだ）．したがってより低い場に微分を演算することで微分の次元をあげるしかないのである．こうして $\delta f=\sqrt{2}i\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\xi}$ が得られるのであるが，重要なことは全微分になっていることで，この性質を用いて，作用つまり理論に超対称性を持たせることができるのだ．超対称な作用は少し先で実際に構成する．

このようにカイラル超場によって，(1.175) を見てわかるように ϕ,ψ,f だけで超対称変換が閉じているので既約表現を構成する超場を得られた．

もうひとつの既約表現のつくりかたであるベクトル超場を次に勉強することにする．ベクトル超場で超対称性な理論を構築することで，超対称ゲージ理論を作ることができる．

ベクトル超場

ベクトル超場は

$$V(x,\theta,\bar{\theta})=V(x,\theta,\bar{\theta})^\dagger \tag{1.176}$$

で拘束条件をつけることで，超場の中の場の数を半分に減らす．カイラル超場のとき同様，フェルミオニック座標で展開し展開係数の場を以下のように適当に表す．

$$\begin{aligned}V(x,\theta,\bar{\theta})=&C+i\theta\chi-i\bar{\theta}\bar{\chi}+\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu\\&+\frac{i}{2}\theta\theta(M+iN)-\frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}(M-iN)\\&+i\theta\theta\bar{\theta}\left(\bar{\lambda}+\frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi\right)\\&-i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left(\lambda-\frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}\right)+\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left(D-\frac{1}{2}\partial^2C\right)\end{aligned} \tag{1.177}$$

ただし (C,D,M,N,A_μ) はボゾンの場で $(\chi,\bar{\chi},\lambda,\bar{\lambda})$ はフェルミオンの場である．しかし詳しく調べると (1.176) の条件だけではまだ可約であることがわかる．実際にカイラル超場のときのように各々の超対称変換を求めてみると (λ,D,A_μ) だ

けで超対称変換が閉じることがわかる．つまり $C,\chi,\bar{\chi},M,N$ は既約表現を作る上では余分なわけだ．したがって (λ,D,A_μ) だけでゲージ場を含むものを作るのが次の目標だ．

超対称 $U(1)$ ゲージ理論

カイラル超場 Φ を用いてアーベリアンゲージ変換を

$$V \longrightarrow V+\Phi+\Phi^\dagger \tag{1.178}$$

と定義する．このゲージ変換の定義は，通常のゲージ変換を再現するようにこのように導入されたもので，今の段階では天下り式に定義することにする．(λ,D,A_μ) だけの既約な部分に落す必要があるので，導入されたゲージ変換を用いて $C,\chi,\bar{\chi},M,N$ を 0 にするヴェス-ズミノ (Wess-Zumino) ゲージ (J. Wess, B. Zumino) と呼ばれる条件を課すことにする．そうすると与えられている超場は

$$V_{\mathrm{WZ}}=\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x)+i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x)-i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x)+\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \tag{1.179}$$

と展開される．

ゲージ場の運動項を作るために

$$W_\alpha=-\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V, \qquad \bar{W}_{\dot{\alpha}}=-\frac{1}{4}DD\bar{D}_{\dot{\alpha}}V \tag{1.180}$$

を用意する．反可換性 ${\theta_\alpha}^2=0$ であることと，θ は 2 成分 $(\alpha=1,2)$ であることから，2 成分スピノル 1 種類によるの 3 個以上の積は常に 0 である．したがって D_α や $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ による 3 階の微分に関しても，

$$D^3=\bar{D}^3=0 \tag{1.181}$$

が恒等的に成り立つので，W_α はカイラル超場，$\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ は反カイラル超場であると言える．また Φ がカイラルであることから，$V\to V+\Phi+\Phi^\dagger$ のもと明らかに不変であることに注意されたし．

$y^\mu,\theta^\alpha,\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ を使うと

$$W_\alpha=-i\lambda_\alpha(y)+\theta_\alpha D(y)+i(\sigma^{\mu\nu}\theta)_\alpha F_{\mu\nu}(y)+\theta\theta(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}(y))_\alpha \tag{1.182}$$

である（この展開を得るには，本書では登場しない公式がないと，面倒な計算が

必要である）．ただし，$F_{\mu\nu}$ は $U(1)$ ゲージ曲率

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{1.183}$$

を表す．

超対称 $U(1)$ ゲージ理論の作用

ここまでで，ようやく超対称な理論を作る準備ができた．超対称な $U(1)$ ゲージ理論の作用を以下の手順で作ろう．

（1） 物質場の作用

「Φ_i をカイラル超場とすると，**その積もカイラル**なので Φ_i の汎関数であるスーパーポテンシャル $W(\Phi_i)$ もカイラル超場である」という事実を使う．カイラル超場 Φ は (1.171) であったことに注意して，y と θ を変数として展開すると

$$W(\Phi) = W(\phi(y)) + \sqrt{2}\frac{\partial W}{\partial \phi_i}\theta\psi_i(y) - \theta\theta\left(\frac{\partial W}{\partial \phi_i} f_i(y) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j}\psi_i(y)\psi_j(y)\right)$$

ただし微分はボゾンの場 $\phi(y)$ で行っていることに注意．これを用いて超対称変換のもと不変な作用は以下のように与えられる．

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\ F(x,\theta,\bar{\theta}) + \int d^2\theta\ W(\Phi) + \int d^2\bar{\theta}\ [W(\Phi)]^\dagger \tag{1.184}$$

ここでは F は任意の超場とした．ただし物理的に有用な模型を作るには制限を付ける必要がある．この作用が超対称変換のもと不変であることを証明してみよう．

証明　フェルミオンの積分 $\int d^2\theta$ は微分と同じであり，また $\theta^3 = 0$ であることを思い出すと，上の作用は各フェルミオンの最高次の項を抜き出している．カイラル超場のところで説明したように，それ以上はないから，SUSY 変換は全微分で得られる．空間積分のもと全微分は 0 なので，この作用は超対称性変換のもと不変である．

■

(1.184) で与えられている作用は一般的であるが，特に運動項（微分を含む場の

2 次の項）を具体的に作ってみよう．(1.181) より，ある超場 $\Psi^\dagger$ を用いて $\bar{D}\bar{D}\Psi^\dagger$ という場を導入すると，これはカイラル超場である．

このままでも作用を作れるがゲージ場との相互作用がないので，ゲージ場の種が入っている $\Lambda(=2i\Phi)$ との相互作用を導入する．(1.178) より，この場合ゲージ変換がカイラルな場 $\Lambda(=2i\Phi)$ を用いて $V \to V - \dfrac{i}{2}(\Lambda - \Lambda^\dagger)$ であることを思い出す (Φ は他のカイラル超場に使うので，ゲージ変換の超対称化に使うカイラル超場として Λ を使うことにした．なるべく慣習にあわせて文字を使っているが，超対称理論のようにたくさんの場が登場すると使う文字が重複することが多いので混乱しないように注意されたし)．物質場（ゲージ群に対して基本表現となるものを含むことを念頭に物質場を考えている）のゲージ変換は超対称に拡張するなら，少なくとも通常の基本表現の物質場（スピノル等）のゲージ変換を含むものとしたいので

$$\Psi \longrightarrow (e^{i\Lambda})\Psi \tag{1.185}$$

と書くしかない．これを用いてゲージ不変な運動項の作用は

$$\int \mathrm{d}^2\theta \ \bar{D}\bar{D}\Psi^\dagger e^{2V}\Psi \tag{1.186}$$

で得られる．このようにゲージ群に対して基本表現の物質場を含む超対称な作用を作ることができる．次はゲージ場そのものの作用 $\displaystyle\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ を含む作用の作り方について考えてみる．

（2） ゲージ場の運動項を含む超対称な作用

ベクトル超場を用いて超対称な作用を作ることを考えてみる．W_α はカイラル超場であるから (1) 同様 $\displaystyle\int \mathrm{d}^2\theta \ W^\alpha W_\alpha$ は SUSY 不変である．したがってこれは超対称不変な作用である．$\displaystyle\int d^2\theta$ を実行して，ゲージ曲率などをあらわに書くと

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^2\theta \ W^\alpha W_\alpha = &-2i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + D^2 \\ &-\frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu})^{\alpha\beta}(\sigma^{\rho\sigma})_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 2i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + D^2 \\
&\quad + \frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}
\end{aligned}
\tag{1.187}
$$

ここで $(\sigma^{\mu\nu})^{\alpha\beta}(\sigma^{\rho\sigma})_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) - \frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ $(\varepsilon^{0123} = +1)$ を使った．こうしてゲージ場の作用 $\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ も含む作用を超対称に作ることができた．

まとめると，超対称な $U(1)$ ゲージ理論のラグランジアンは

$$
\int \mathrm{d}^2\theta\ \bar{D}\bar{D}\Psi^\dagger e^{2V}\Psi + \int \mathrm{d}^2\theta\ W^\alpha W_\alpha \tag{1.188}
$$

で与えられる．

以上で見てきたのは，$U(1)$ のゲージ対称性を持つ「カイラル超場の作用」とゲージ場を含む「ベクトル超場の作用」である．もちろんベクトル超場だけでもゲージ理論を含む超対称な理論であるし，それに任意の個数のカイラル超場による物質場の作用を加えても全体として超対称な理論である．それらは適当に考えたい系を実現するように設定すればいいことである．次の節ではこれを非アーベル的なゲージ理論であるヤン-ミルズ理論の場合に拡張する．

1.7.2 $\mathcal{N}=1$ 超対称ヤン-ミルズ理論

非アーベル的な超対称ヤン-ミルズ理論を作るために，W_α を非アーベル群の表現に拡張することを考える．そのためにゲージ群の随伴表現となるベクトル超場 V を前節同様に考える．通常のゲージ変換を含むようにするためには，超対称ゲージ変換は

$$
e^{2gV} \longrightarrow e^{i\Lambda^\dagger}e^{2gV}e^{-i\Lambda}, \qquad e^{-2gV} \longrightarrow e^{i\Lambda}e^{-2gV}e^{-i\Lambda^\dagger} \tag{1.189}
$$

とするしかない．ただし Λ はゲージ群のリー代数に値を持つカイラル超場，つまり $\bar{D}\Lambda = 0$ とした．g はゲージ結合定数を表す．アーベル的 $(U(1))$ ゲージ理論で $W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V$ だったものを今の場合，どう変更すべきか？　以下のように置けばいいことがわかる．

$$
\begin{aligned}
W_\alpha &= -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}(e^{-2gV}D_\alpha e^{2gV}) \\
\bar{W}_{\dot{\alpha}} &= +\frac{1}{4}DD(e^{2gV}\bar{D}_{\dot{\alpha}}e^{-2gV})
\end{aligned}
\tag{1.190}
$$

なぜなら，ゲージ変換は

$$
\begin{aligned}
W'_\alpha &= -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}\left(e^{-i\Lambda}e^{2gV}e^{i\Lambda^\dagger}D_\alpha\left(e^{-i\Lambda^\dagger}e^{-2gV}e^{i\Lambda}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}(e^{-i\Lambda}e^{2gV}D_\alpha(e^{-2gV}e^{i\Lambda})) \\
&= -e^{-i\Lambda}\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}(e^{2gV}D_\alpha e^{-2gV})e^{i\Lambda} + \frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}(e^{-i\Lambda}D_\alpha e^{i\Lambda}) \\
&= e^{-i\Lambda}W_\alpha e^{i\Lambda}
\end{aligned}
\tag{1.191}
$$

であるから，ゲージ変換に対して共変な変換になっているからである．ゲージ曲率がこのように変換されるべき量なので，これが適していると理解されるだろう．

実際以下で正しくゲージ場の運動項が含まれることが具体的に確かめられる．今回もヴェス-ズミノゲージをとり自由度を落としておく．フェルミオニック座標で展開すると，$U(1)$ の場合と同様に（しかし計算はかなり面倒になるが）

$$
\frac{1}{2g}W_\alpha = -i\lambda_\alpha(y) + \theta_\alpha D(y) + i(\sigma^{\mu\nu}\theta)_\alpha F_{\mu\nu}(y) + \theta\theta(\sigma^\mu D_\mu\bar{\lambda}(y))_\alpha
$$

となる．ただし，$F_{\mu\nu}$ は曲率

$$
F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \tag{1.192}
$$

である．ゲージ共変微分

$$
D_\mu\bar{\lambda} = \partial_\mu\bar{\lambda} - ig[A_\mu, \bar{\lambda}] \tag{1.193}
$$

と複素化したカップリング定数

$$
\tau = \frac{\Theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2} \tag{1.194}
$$

を導入して超対称なヤン-ミルズ理論の作用を書き下そう[33]．

---

[33] ここで複素の結合定数を導入したのは，トポロジカルな作用 $\int F\wedge F$ が超対称な理論では必然的に現れるためである．しかし結合定数というものは数学者にはあまりなじまないもので，

超対称ゲージ作用

$$L_{\text{gauge}}=\frac{1}{32\pi}\mathrm{Im}\left(\tau\int \mathrm{d}^2\theta\ \mathrm{tr}W^{\alpha}W_{\alpha}\right)$$
$$=\mathrm{tr}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-i\lambda\sigma^{\mu}D_{\mu}\bar{\lambda}+\frac{1}{2}D^2\right)+\frac{\Theta}{32\pi^2}g^2\mathrm{tr}F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu}$$
$$(1.195)$$

ただしホッジ双対を

$$F^{*\mu\nu}=\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\ :\text{ミンコフスキー}$$
$$\left(F^{*\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\ :\text{ユークリッド}\right) \tag{1.196}$$

と書いた．また本来 L_{gauge} 全体に定数 $1/4g^2$ が乗ぜられているが場の再定義を使って吸収できるので省略した．(1.195) の計算で

$$\int d^2\theta\ (\sigma^{\mu\nu}\theta)^{\alpha}(\sigma^{\rho\tau}\theta)_{\alpha}F_{\mu\nu}F_{\rho\tau}=-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{i}{2}F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu}$$

となることを用いるが，この導出には $\theta_{\alpha}\theta_{\beta}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\theta^2$，$(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}^{\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}=(\sigma^{\mu\nu})_{\gamma}^{\beta}\varepsilon_{\beta\alpha}$ などの公式が使われる．

次に物質場であるカイラル多重項を導入し，ゲージ場と相互作用をする物質場の作用も導入しよう．ゲージ群の表現 R であるカイラル超場を Φ^i とし $(T_R^a)^i{}_j$ をその表現でのゲージ群の生成子とする．アーベリアンのとき同様ゲージ変換は

$$\Phi^i\longrightarrow\left(e^{i\Lambda}\right)^i{}_j\Phi^j,\qquad \Phi_i^{\dagger}\longrightarrow\Phi_j^{\dagger}\left(e^{-i\Lambda^{\dagger}}\right)^j{}_i \tag{1.197}$$

とする．ここで $\Lambda=\Lambda^aT_R^a$ であること注意．アーベリアンと同じでゲージ不変な作用は

なんのためにわざわざ別に書く必要があるのかがわかりにくいところである．しかし物理では考えている系のエネルギーレベルと相互作用の起こりやすさを表す結合定数は不可分な概念であり，エネルギーレベルによっては相互作用を無視できたりする場合も出てくるのである．結合定数が動くことによって理論が変化していくのである．そういう意味でも結合定数をあらわに書くことには意味がある．

$$\Phi^\dagger e^{2gV}\Phi \equiv \Phi^\dagger e^{2gV^a T_R^a}\Phi = \Phi_i^\dagger \left(e^{2gV}\right)^i{}_j \Phi^j \tag{1.198}$$

としておけばいい．また，相互作用項を表すポテンシャルも含めて

$$L_{\mathrm{matter}} = \int \mathrm{d}^2\theta \mathrm{d}^2\overline{\theta}\ \Phi^\dagger e^{2gV}\Phi + \int \mathrm{d}^2\theta\ W(\Phi) + \int \mathrm{d}^2\overline{\theta}\ [W(\Phi)]^\dagger \tag{1.199}$$

が物質場を含む非アーベル的ゲージ対称性と超対称性を保つ作用として得られる．

以上をまとめて $\mathcal{N}=1$ の超対称ゲージ理論のゲージ場と物質場（ゲージ群に対する基本表現などの随伴表現と異なる表現のスピノル等なども含みうる物質場）を含む作用は次のように得られる．

$\mathcal{N}=1$ の超対称ゲージ理論の作用

今までの作用 (1.195) と (1.199) を足し

$$\begin{aligned}
L &= L_{\mathrm{gauge}} + L_{\mathrm{matter}} \\
&= \frac{1}{32\pi}\mathrm{Im}\left(\tau \int \mathrm{d}^2\theta\ \mathrm{tr} W^\alpha W_\alpha\right) + \int \mathrm{d}^2\theta \mathrm{d}^2\overline{\theta}\ \Phi^\dagger e^{2gV}\Phi \\
&\quad + \int \mathrm{d}^2\theta\ W(\Phi) + \int \mathrm{d}^2\overline{\theta}\ [W(\Phi)]^\dagger \\
&= \mathrm{tr}\Bigg(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\lambda\sigma^\mu D_\mu\bar{\lambda} + \frac{1}{2}D^2 + \frac{\Theta}{32\pi^2}g^2 F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu} - (D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi \\
&\quad - i\psi\sigma^\mu D_\mu\bar{\psi} + f^\dagger f + i\sqrt{2}g\bar{\phi}\lambda\psi - i\sqrt{2}g\bar{\psi}\bar{\lambda}\phi + g\bar{\phi}D\phi \\
&\quad - \frac{\partial W}{\partial\phi^i}f^i + h.c. - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^i\partial\phi^j}\psi^i\psi^j + h.c.\Bigg) + \text{全微分の項}
\end{aligned} \tag{1.200}$$

がトータルの作用である．ここで $h.c.$ は前の項のエルミート共役を意味する．超場でない場で書かれている 3 番目の等号以下のものは，いつものようにフェルミオニック座標積分を実行して得られるものである．少々の手間で確かめられるので，興味があれば実際に展開して $\int d^2\theta$ 等を実際に実行してみてほしい．

さらに作用を簡単にするために，補助場の運動方程式から

$$f_i^\dagger = \frac{\partial W}{\partial\phi^i}, \qquad D^a = -g\bar{\phi}T^a\phi \tag{1.201}$$

が得られるので，これを代入すると（あるいは量子論なら補助場のガウス積分を

実行すると）

$$L=\mathrm{tr}\Bigg(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-i\lambda\sigma^\mu D_\mu\bar{\lambda}+\frac{\Theta}{32\pi^2}g^2F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu}-(D_\mu\bar{\phi})D^\mu\phi$$
$$-i\psi\sigma^\mu D_\mu\bar{\psi}+i\sqrt{2}g\bar{\phi}\lambda\psi-i\sqrt{2}g\bar{\psi}\bar{\lambda}\phi-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^i\partial\phi^j}\psi^i\psi^j$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^i\partial\phi^j}\right)^\dagger\bar{\psi}^i\bar{\psi}^j-V(\bar{\phi},\phi)\Bigg) \tag{1.202}$$

が得られる．$V(\bar{\phi},\phi)$ は以下のように与えられる

$$V(\bar{\phi},\phi)=f^\dagger f+\frac{1}{2}D^2=\sum_i\left|\frac{\partial W}{\partial\phi^i}\right|^2+\frac{g^2}{2}\sum_a|\bar{\phi}T^a\phi|^2. \tag{1.203}$$

注意　以上の議論は暗黙のうちに「くりこみ」可能であるように要請して作られている．くりこみについてはこの本では詳しく扱わないので理由を述べることはできないが,「高次の微分項がでてこない」とか,「超場をスカラー場で導入する」などを課して作用を作っている．しかし量子論的な有効作用（これについては後で出てくる）を考えるときはそういった条件が不必要になるために，上の作用より一般的なものを議論する必要がある．

1.7.3　$\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論

上の議論では，超対称性の生成子は Q と $\bar{Q}$ の一組しか出てこなかった．しかし，さらに大きな対称性を持つ理論として，多くの超対称性を持つ理論が考えられる．そういう理論は高い対称性のためにより解析が簡単になる．その結果多くの非自明な性質が理解されたりする．この本のメインテーマの一つである「双対性 (duality)」の予想なども，この高い対称性が故に予想できた事実である．以下の章で大事になる $\mathcal{N}=2$, つまり Q と $\bar{Q}$ の組が 2 組ある超対称ゲージ理論について特に勉強しよう．

Q と $\bar{Q}$ の組が二つあるので区別する添字 $i,j\in\{1,2\}$ をつけることにする．$\mathcal{N}=2$ の超対称代数は $\mathcal{N}=1$ の超対称代数に加えて

$$\{Q^i_\alpha,\bar{Q}^j_{\dot{\beta}}\}=-2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}P_\mu\delta^{ij},\qquad\{Q^i_\alpha,Q^j_\beta\}=2\sqrt{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{ij}Z$$

$$\{\bar{Q}^i_{\dot{\alpha}},\bar{Q}^j_{\dot{\beta}}\}=2\sqrt{2}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{ij}\bar{Z} \tag{1.204}$$

が付け加えられる変更がある．Z はセントラルチャージと呼ばれる定数で，この定数を選ぶ自由度が存在する．このセントラルチャージの存在が後で重要な性質を導く．

$\mathcal{N}=2$ 超対称性

4 次元の $\mathcal{N}=2$ の超対称性を持つ理論を構成するためには，$\mathcal{N}=1$ の超空間で用いたフェルミオニック座標を $\theta,\bar{\theta}$ を 2 組用意し，$\theta_1,\bar{\theta}_1,\theta_2,\bar{\theta}_2$ とし，複素スカラー超場 $\Phi_{N=2}(x,\theta_1,\bar{\theta}_1,\theta_2,\bar{\theta}_2)$ を用いる．ただし 4 次元の場合，$\theta_1,\bar{\theta}_1,\theta_2,\bar{\theta}_2$ はそれぞれ 2 成分のスピノルなので（つまり $(\theta_1)_\alpha$, $\alpha=1,2$ などとそれぞれスピノルの添字を持っている），超場をフェルミオニック座標で展開すると 2×4 で 8 次までの展開となる．

$$\Phi_{N=2}(x,\theta_1,\bar{\theta}_1,\theta_2,\bar{\theta}_2)=\phi(x)+\theta\psi+\bar{\theta}\bar{\chi}+\cdots+\theta_1^2\bar{\theta}_1^2\theta_2^2\bar{\theta}_2^2D' \tag{1.205}$$

ただし，$\theta_i^2=\theta_i^\alpha\theta_{i\ \alpha}$ $(i=1,2)$ であることに注意されたし．しかし，このような超場は $\mathcal{N}=1$ のときと同様に超対称ポアンカレ群の既約表現をなさないので，例によって「カイラル」という条件をつけることにする．超対称共変微分も 2 組用意され以下の条件になる．

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}i}\equiv-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}i}}-i\theta_i^\beta\sigma^\mu_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu, \qquad \bar{D}_i\Phi_{N=2}=0, \qquad i=1,2 \tag{1.206}$$

前節までと同様 $y^\mu=x^\mu+i\theta_i\sigma^\mu\bar{\theta}^i$ と θ_i のみに依存する場 $\Phi_{N=2}(y,\theta)$ がカイラル超場になっている．これによって $\mathcal{N}=2$ の理論を $\mathcal{N}=1$ の前節までの言葉に翻訳もでき，関係もよくわかる．

簡単のためアーベリアンゲージ理論で考えると，既約表現にするために $D^iD^j\Phi_{N=2}=\bar{D}^i\bar{D}^j\bar{\Phi}_{N=2}$ と拘束条件を課し，さらに場の数を減らす．そうすると $\mathcal{N}=1$ の言葉で書くとことができ，(1.171), (1.179), (1.180) を用いて $\Phi_{N=2}$ を表そう．前節の θ を θ_1 とみなし，θ_2 について展開する．

$$\Phi_{N=2}(y,\theta)=\Phi(y,\theta_1)+\sqrt{2}\theta_2^\alpha W_\alpha(y,\theta_1)+\theta_2^2G(y,\theta_1) \tag{1.207}$$

ただし $\Phi_{N=2}(y,\theta_1)$ は，$\mathcal{N}=2$ の超場を表すが，特に混乱しない場合は添字の

「$N=2$」は以下では省略される（二つの超対称を表す添字の 1, 2 やスピノルの添字の 1, 2 と，右辺第 3 項のように反対称テンソルで内積をとって作ったスカラー $\theta^2=\theta^\alpha\theta_\alpha=\varepsilon^{\beta\alpha}\theta_\alpha\theta_\beta$ の 2 を混乱しないように注意されたし）．また，後で見るようにゲージ理論を再現するためには $G(y,\theta_1)=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int d^2\bar{\theta}_1\Phi^\dagger e^{2gV}$ とする必要がある．

$\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論を $\mathcal{N}=1$ 超対称ゲージ理論として扱えるということを別の見方で考えると，$\mathcal{N}=1$ のときの物質場の場の組（カイラル多重項）をゲージ場のベクトル多重項と一緒の多重項にすることで，超対称性を増やすことに成功しているとも見られる．ただしこれを実現するために，ゲージ場がゲージ群の随伴表現であるから，それにあわせて物質場の表現も随伴表現であるものとする[34)]．非アーベル的な場合も大体同じような議論で，結局 $\mathcal{N}=2$ の超対称な作用は「プレポテンシャル」と呼ばれる $\Phi_{N=2}$ の複素解析関数 $\mathcal{F}(\Phi_{N=2})$ を用いて，

$$S=\int d^4xd^2\theta_1d^2\theta_2\ \mathrm{tr}\mathcal{F}(\Phi_{N=2})+h.c. \tag{1.208}$$

と書き表せる ($h.c.$ は前の項のエルミート共役)．$\displaystyle\int d^2\theta_2$ を実行すると，残っている θ_1 を単に θ と書き，$\mathcal{N}=1$ の作用

$$S=\int d^4x\ \left\{-\frac{1}{2}\int d^2\theta\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\Phi^a}G^a\right)-\int d^2\theta\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\Phi^a\partial\Phi^b}W^{\alpha a}W^b_\alpha+h.c.\right\} \tag{1.209}$$

が得られることがわかるだろう．ただし，ゲージ群の随伴表現の添字を a,b で表した．(1.209) を導くには，フェルミオン積分は微分と同じなので θ_2 の 2 次を拾えばいい．引数 Φ の中の G の係数から拾ってきたのが第 1 項で，W^α の 2 次の係数から拾ってきたのが第 2 項である．係数を拾う際，$\mathcal{F}(\Phi_{N=2})$ を $\Phi_{N=2}$ で微分しても Φ で微分しても結果は同じなのだが，$\displaystyle\int d^2\theta_2$ で積分した後は θ_2 が残ることはないので，$\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial\Phi^a}$ と $\dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\Phi^a\partial\Phi^b}$ は $\mathcal{N}=1$ の超場 Φ のみの関数で書かれて

[34)] 他に多重項を違う表現でいれて，$\mathcal{N}=2$ の超対称性を作ることは当然できる．とりあえず今はゲージ場を含む $\mathcal{N}=2$ の超対称理論を作ることが目的なので，随伴表現だけ考えることにする．後でサイバーグ-ウィッテン理論 (N. Seiberg, E. Witten) を考えるときに違う表現の多重項をハイパー多重項として入れている．

いるのである．

説明はしないが，くりこみ可能であるという条件を課し，$\mathrm{tr}\mathcal{F}(\Phi)=\mathrm{tr}(\tau\Phi^2)=\tau\Phi^a\Phi_a$(超場の「$N=2$」の添字は省略した）であるとすると，

$$
\begin{aligned}
L_{\mathrm{YM}}^{N=2}&=\frac{1}{32\pi}\mathrm{Im}\left(\tau\int \mathrm{d}^2\theta\ \mathrm{tr}W^{\alpha}W_{\alpha}\right)+\int \mathrm{d}^2\theta\mathrm{d}^2\overline{\theta}\ \mathrm{tr}\Phi^{\dagger}e^{2gV}\Phi\\
&=\mathrm{tr}\Big(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-i\lambda\sigma^{\mu}D_{\mu}\bar{\lambda}-i\psi\sigma^{\mu}D_{\mu}\bar{\psi}-(D_{\mu}\phi)^{\dagger}D^{\mu}\phi\\
&\quad+\frac{\Theta}{32\pi^2}g^2F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu}+\frac{1}{2}D^2+f^{\dagger}f\\
&\quad+i\sqrt{2}g\bar{\phi}\{\lambda,\psi\}-i\sqrt{2}g\{\bar{\psi},\bar{\lambda}\}\phi+gD[\phi,\bar{\phi}]\Big)
\end{aligned}\tag{1.210}
$$

が得られる．D と f は補助場なので，ガウス積分または運動方程式を用いて消去してもよい．

また，$\mathcal{N}=1$ の超対称な作用 (1.200) で，カイラル多重項のゲージ群に対する表現を随伴表現にとり，スーパーポテンシャル $W(\phi)$ を除いた物と一致していることも確認できる．

以上の $\mathcal{N}=2$ の超対称な作用の導出について，不慣れな読者が急に試みてもなかなか難しいと思われる．したがって，詳細は認めてしまって読み飛ばしても一向にかまわない．しかしプレポテンシャルが $\mathcal{F}$ が Φ だけの関数であることから，**複素数 z の関数 $\mathcal{F}(z)$ と読み替えると正則関数である**という事実と，$\mathcal{N}=2$ 超対称性が存在するという要請だけで**一つの正則関数 $\mathcal{F}(z)$ を与えることで作用が決まっている**という事実は重要であり，本書の残りの部分ではしばしばこの事実が用いられる．

1.8 有効作用

この節は「有効作用」（あるいは有効ポテンシャル）について解説するが，厳密な定義や具体的な計算については触れない．というのは，定義通りに正直な計算で実際に「有効作用」を求められるような例を後で扱うことはないからである．摂動的な計算により有効作用の計算を行うことは本書の主題からずれるので，そういった計算結果は単に引用することにする．後に現れるのは $\mathcal{N}=2$ 超対称理論の有効作用であり，その理論が持つ対称性と性質から有効作用を決定して

いくことになるので，$\mathcal{N}=2$ 超対称理論の有効作用だけを詳しく定義することにする．有効作用についてより詳しく知りたい読者は参考文献 [13] 等を参照されたし．なお，有効ポテンシャルとは，場の期待値が定数の場合に制限された場合の有効作用のことである．

有効理論（特に低エネルギー有効理論）の概念を理解するために，まず大雑把な考え方を説明しよう．考えている系のエネルギーによって記述するのにふさわしい物理理論の姿が変わるというのがポイントだ．例えば地球上での落下運動を計算するのにアインシュタインの一般相対論で計算するのでは問題をいたずらに難しくするだけで扱いにくいが，一般相対論から導くことができるニュートンの力学で計算するのは容易である．したがって弱い静的な重力下の運動ではニュートン力学がより「有効」なわけである．

ゲージ理論で考えてみると，1.4 節で説明したように，電磁気の理論や核力の理論は統一された非アーベリアンのゲージ理論である統一理論とその「対称性の破れ」で記述できる．しかし我々の日常生活でおこる化学的な現象を考えるときには，核分裂も核融合も考える必要がないので電磁気の理論 ($U(1)$ のゲージ理論) だけで十分である．つまり我々の日常のレベルでは電磁気の理論が有効理論なのだ．

本来潜在的に存在している核力が我々の日常生活で重要な役割を果たしていないのはなぜだろうか？ 1.4 節で説明したように，自発的対称性によってゲージ場の質量が 0 から 0 でない質量に変化する．核力を媒体とする粒子はそのようにしてできた質量を持つ粒子であるが，その質量は非常に重いのである．質量は (1.17) 式で見たようにエネルギーであるから，質量に十分見合うエネルギーがないとその粒子が現れないのである．したがって我々の日常生活のエネルギーレベルでの物理現象を記述するには核力は必要がなく，統一理論の低エネルギーでの有効な理論は電磁気の理論である．そして電磁気理論の作用が有効作用である．

このように，理論がある条件のもとでは別の理論でより実情にあった記述が可能ならばそれを有効理論と呼び，特に低エネルギーで実現される軽い質量の粒子だけで記述される有効理論は「低エネルギー有効理論」と呼ぶ．これが，大雑把な有効理論の思想である．以下では，有効理論を記述する有効作用についてどう定義すべきか見ていく．

有効作用の定式化は2種類ある．一つはウィルソン流 (K.G. Wilson) の有効作用と呼ばれ，あるエネルギーレベルより上のモードの経路積分を実行してしまって，それ以下のエネルギーで書かれるものである．分配関数

$$Z=\int \mathcal{D}\phi \exp\{-S(\phi)\} \tag{1.211}$$

の汎関数積分 $\int \mathcal{D}\phi$ をあるエネルギーレベル μ より上のモード $\int \mathcal{D}\phi_{k>\mu}$ と低エネルギーのモード $\int \mathcal{D}\phi_{k\leq\mu}$ に分け，高エネルギー対応部分 $\int \mathcal{D}\phi_{k>\mu}$ の経路積分を実行してしまって，それ以下のエネルギーで

$$Z=\int \mathcal{D}\phi \exp\{-S(\phi)\}=\int \mathcal{D}\phi_{k\leq p} \exp\{-S_{\text{eff}}(\phi_{k\leq p})\} \tag{1.212}$$

として形式的に定義される $S_{\text{eff}}(\phi_{k\leq p})$ のことである．もう少し正確に定義すると，1.6.4 節のところでカットオフ Λ が導入されていたが，その他に考えている物理現象のスケール（くりこみスケール）を μ として導入する．スケール（くりこみスケール）μ は，おおよそ 1.6.4 節で考えた「くりこみ条件」を設定する際に使われるエネルギースケールと考えてよい．考えている理論の全ての場の運動量や質量はカットオフ Λ より小さいと考え，また $\mu \ll \Lambda$ とする．μ と Λ の間の運動量，エネルギー，質量を持つ粒子の場について上述の経路積分を積分を実行することで得られるものをウィルソン有効作用と呼ぶ．

もうひとつの有効作用の定式化は，外線を除いたファインマン図のうちで伝播関数を表す線を切っても二つにわかれないファインマングラフ（1粒子既約グラフ）の生成汎関数となっているワインバーグとコールマンによる有効作用で，古典作用が第一次近似で，それに摂動的に量子効果を足しあげて求めるものがある．それが求まると理論が量子論的にも解けたことになる．

ここで，有効作用 F は，作用を exp の方に乗せて汎関数積分した量 $Z=\int \exp(-S)$ すなわち分配関数に対して，その log をとったもの

$$-F=\log Z \Longleftrightarrow Z=\exp(-F) \tag{1.213}$$

とおおよそ定義してしまってもいいことが知られている[35]．このように定義すると有効作用と呼ぶより，むしろ自由エネルギーと呼ぶほうが適切かもしれないことを考慮して F という記号を用いている．グラフの生成汎関数としての「有効作用」と $\log Z$ の関係も本解説では示さないので，事実を羅列されているだけになっていることに不満を抱く読者は巻末の参考文献 [7],[13] 等に当たられたし．この解説では，非常に限定された $\mathcal{N}=2$ 超対称理論の有効理論について限定して以下で論じることにする．

量子論的効果は摂動的に扱うものと非摂動的に扱うものがある．摂動的に扱う量子効果は 1.6.3 節でみたように，摂動の次数を量子論の基本単位であるプランク定数 $\hbar$ で数える．さらに一般にループの数とプランク定数の次数が対応することを見た．

$$
\begin{aligned}
\text{第 0 近似} &= \text{古典作用} \\
\text{第 1 近似} &= \text{1 ループの効果} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

という量子効果の計算を摂動的に順次計算していき有効作用を求めていくのである．こうして得られたものを標語的に書くと

$$
\begin{aligned}
(\text{有効作用}) = (\text{古典作用}) + (\text{1 ループ}) + (\text{2 ループ}) + \cdots \\
+ (\text{非摂動的効果（インスタントンなど）})
\end{aligned}
$$

となる．「(n ループ)」は n 個のループグラフの計算で得られる量子補正である．「(非摂動的効果)」は後の章で議論されるが，トポロジカルに区別される真空か

---

[35] ワインバーグとコールマンの有効作用の意味でこれを見るには，正確には 1.6.3 節で書かれていた $Z(J)$ の対数 $\log Z(J)$ のルジャンドル変換 $\log Z(J) - \int \phi J$ のように有効作用を書くべきであろう．$\log Z(J)$ は連結なファインマングラフの生成汎関数，$\log Z(J) - \int \phi J$ は 1 粒子規約なグラフの生成汎関数という物理的な意味を持つのであるが，そのような物理的な問題に立ち入る予定がないので，ここでは考えないことにする．とにかく有効作用あるいは自由エネルギーと呼ばれる分配関数の対数に関する量と，上の摂動的な古典作用と量子効果を足し上げたものが対応するのである．また，このように書いたとき F は，場の期待値に対する汎関数であると考えることも留意されたし．さらに詳しいことは巻末の参考文献 [7],[13] 等に当たられたし．

らの寄与を表す．1.6.3 節の摂動論で見たようなループグラフの計算はあくまでも，一つの真空状態を固定した上で計算していたわけであるが，後の章で出てくるゲージ理論のインスタントンのような配位があると，トポロジカルに区別される別の真空が存在することになる．経路積分が全ての配位について足しあげることであれば，そのような摂動的にはつながりえない真空状態があるのであれば，それらについても足し上げなければならないはずである．それらを標語的に（非摂動的効果）と表した．

ウィルソンの有効作用について，「特異点」が現れるメカニズムについてコメントしておく．$m>\mu$ の質量を含むある場が存在していたとして，有効作用を得るために $m>\mu$ なのでその場については経路積分を実行してしまうとする．その有効作用を仮に S_m と書くことにする．その質量がなんらかの理由で変化する場合を考えても，m について解析的ならば有効である．m を μ よりも小さい値に変化していくと，正しい意味での有効作用ではなくなる．正しい有効作用ならば $m<\mu$ について積分してはいけないのだから，本来経路積分してはいけない場について積分してしまったことになる．したがって通常 $m=\mu$ において不連続であり，特異点が発生する．

特に後で考えるのは低エネルギー有効作用，すなわち質量が 0 の粒子のみを残して他は積分してしまう場合である．その場合 $m\to 0$ となれば，S_m は質量 0 の粒子を質量がある粒子として経路積分してしまっているのであるから，特異点を持ってしまう．このことが，次の章のサイバーグ-ウィッテンの考察で用いられる．

$\mathcal{N}=2$ 超対称理論では，前節で見たように $\Phi^\dagger$ を含まず，Φ だけの関数で書かれる（すなわち正則関数である）プレポテンシャル $\mathcal{F}$ で作らないと $\mathcal{N}=2$ 超対称であることを満たすものが得られないことから，さらに突っ込んだ議論が可能である．したがって，一般の場合の有効作用についてきっちり定義したり，物理的な背景をきちんと議論するのはあきらめて，$\mathcal{N}=2$ 超対称理論の有効理論について詳しく見ることにする．

$\mathcal{N}=2$ ゲージ理論の低エネルギー有効作用

$\mathcal{N}=2$ ゲージ理論の低エネルギー有効作用を求めることがこの本の主題の一つである．低エネルギー有効作用は質量のない粒子で記述される，高階の微分を含

まない有効作用と定義する．有効作用の定義通りに経路積分の実行などの量子効果の直接計算で求めることは非摂動効果に関しては難しいのであきらめ，別の手掛りから求めて行くのである．

$\mathcal{N}=2$ の超対称ゲージ理論の有効作用は，超対称性の要請からさらに以下のように形が制限される．前節で超対称な作用を決めるときは，くりこみを考えて高次のベキを含まないものを選んでいた．その条件をゆるめることでより一般的な超対称な作用の形を求めることができるので，それにより有効作用の形を制限するのである．前節で見たように $\mathcal{N}=2$ の超対称の要請から，プレポテンシャルとして正則関数 $\mathcal{F}(z)$ を使って有効作用が構成されなければならない．ケーラーポテンシャル (E. Kähler) と呼ばれる K といくつかの記号を以下のように定義する．

$$-i\mathcal{F}_{ab}(z):=-i\frac{\partial^2}{\partial z^a\partial z^b}\mathcal{F}(z) \tag{1.214}$$

$$\begin{aligned}\frac{16\pi}{(2g)^2}K(z,z^\dagger)&:=-\frac{i}{2}z_a^\dagger\frac{\partial}{\partial z^a}\mathcal{F}(z)+h.c.\\&=-\frac{i}{2}z_a^\dagger\mathcal{F}_a(z)+\frac{i}{2}\left[\mathcal{F}_a(z)\right]^\dagger z_a\end{aligned} \tag{1.215}$$

前節で古典作用を求めるときに「くりこみ可能性」の制限を課したが，有効作用ではその必要がないので，その前の段階の作用の形 (1.209) で，

$$L_{\rm eff}^{N=2}=\left[\frac{1}{64\pi i}\int \mathrm{d}^2\theta\ \mathcal{F}_{ab}(\Phi)W^{a\alpha}W_\alpha^b+\frac{1}{32\pi i}\int \mathrm{d}^2\theta \mathrm{d}^2\overline{\theta}\ \left(\Phi^\dagger e^V\right)^a\mathcal{F}_a(\Phi)\right]+h.c. \tag{1.216}$$

$$=\frac{1}{16\pi}\mathrm{Im}\left[\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^2\theta\ \mathcal{F}_{ab}(\Phi)W^{a\alpha}W_\alpha^b+\int \mathrm{d}^2\theta \mathrm{d}^2\overline{\theta}\ \left(\Phi^\dagger e^V\right)^a\mathcal{F}_a(\Phi)\right] \tag{1.217}$$

の形で有効作用が得られるのである．以下では，これを $\mathcal{N}=2$ ゲージ理論の有効作用の大前提として用い，摂動計算を含めて物理的な制限と矛盾しない正則関数であるプレポテンシャル $\mathcal{F}$ を求めることを主題としよう．この正則関数を求める方法は，サイバーグ-ウィッテンによって 94 年に発見された．

この節をもってサイバーグ-ウィッテン理論などの近年の話題に挑戦するための準備ができた．次の章ではさっそくサイバーグ-ウィッテン理論について見ていこう．

第 2 章

双対性（電磁双対性）

この章でようやく「双対性（電磁双対性）」とは何かという，この本の主題の一つについて学ぶことにする.「双対性」という言葉はあまりにも多くの意味を持ち，例えば「ポアンカレの双対性」などというようにも使っている．しかし，ここで論じられるのは電磁双対性という概念で，強結合と弱結合（あるいは電気と磁気）を入れ替えた理論のつながりのことである．古くからこうした双対性は知られていたが，ここでは $\mathcal{N}=2$ のゲージ理論における双対性について勉強する．この概念は「予想」であり証明されたわけではないが，数々の状況証拠によって多くの物理学者に信じられている．そして，その予想に基づいて得られる数学的予想も今のところ正しいのである．

この章の結果は唐突に導かれたように感じられ，にわかには信じられないかもしれない．特に通常の摂動論的な場の理論を学んだ者にとっては，楕円曲線や周期積分を用いて場の理論の量子論的結果を導くのは，著者自身もそうであったように何か腑に落ちない感じが残るかもしれない．そういった意味では，この解説を読んだだけでは不満が残ることになるだろう．しかしいくつかの知られた事実を認めてしまえば，双対性，BPS, モノドロミー問題などのサイバーグ-ウィッテン理論の核心部分については理解できるように書いたつもりだ．

またこの核心部分を理解して初めて，ドナルドソン不変量 (S.K. Donaldson) とサイバーグ-ウィッテン不変量の結びつきが予想されるに至った経緯が理解でき

る．そして 5 章において，この章とは全く異なる方法で，しかしより自然な方法で同じ結果を導出することで不満は解消される．しかしながら，5 章のネクラソフの方法 (N. Nekrasov) に至るまでの 10 年間に起こった非摂動論の革命の基本的なアイディアがこの章に含まれる．

2.1　94 年のサイバーグ-ウィッテン理論

94 年以後の 10 年間の超弦理論や場の理論とそれにまつわる数学の激変の幕開けのきっかけの一つは，94 年のサイバーグ-ウィッテン理論であろう [16] (94 年という枕詞がついているのは，他にもサイバーグ-ウィッテンの 2 人で出した有名な論文が多いので，年代を指定しないとわからないからだ)．

「$\mathcal{N}=2$ の $SU(2)$ 超対称ゲージ理論を解く」ことが目標である．もう少し具体的に言うと「$\mathcal{N}=2$ の $SU(2)$ 超対称ゲージ理論の低エネルギー有効作用を求める」ということだ．あるいは「有効作用」を求めるのに必要な「プレポテンシャル $\mathcal{F}$ を求める」と言い換えることもできる．

ここで，有効作用について今一度注意をしておく．一般的な「有効作用」の定義や物理的な意味を詳細に説明していないのであるが，$\mathcal{N}=2$ の超対称がある場合には，有効作用を定義することは 1.8 節でみた程度の知識で十分であるという事情がある．

この章で論じられるのは「ウィルソン流の有効作用」である．一般的に「ウィルソン流の有効作用」の物理的な意味は，「あるエネルギーレベルより上の高エネルギーモードを経路積分することで得られたものを，積分されていない低エネルギー部分と併せて，古典作用から変形を受けた作用とみなしたもの」と前章 (1.8) 節で定義した．経路積分を部分的に実行することで得られる，量子効果を含む作用積分と言ってもよい．特に低エネルギー有効作用と言うときは，質量のない粒子のみで記述され，3 階以上の高階微分は含まないものとする．

しかし，現実には非摂動的な効果も含めて経路積分を実行することは難しい場合が多く，その意味で一般に数学的に定義されているというわけではない．ではどのように有効作用を求めることが可能かというと，例えばこの章で扱う場合のように「$\mathcal{N}=2$ の超対称性が存在する」などという条件がつくと，有効作用が満

たさなければならない条件が現れる．そのような条件を課すことで数学的に定義され計算されるのである（(1.216) とその前後を参照されたし).

$\mathcal{N}=2$ 超対称性理論

$\mathcal{N}=2$ ベクトル多重項は

$$\begin{array}{ccc} & A^a_\mu & \\ {}^{Q_1}\nearrow & & \nwarrow^{Q_2} \\ \lambda^a & & \psi^a \\ {}_{Q_2}\nwarrow & & \nearrow_{Q_1} \\ & \phi^a & \end{array} \tag{2.1}$$

で形成される．右上に向かう矢印が Q_1 の変換を表し，左上に向かう矢印が Q_2 を表している．同様にハイパー多重項を導入しておくと次のようになる．

さらに二つのカイラル多重項（ハイパー多重項）で $\mathcal{N}=2$ の多重項を用意する．$\mathcal{N}=2$ ハイパー多重項は必ずしも双対性の理解に必要なわけではないが，後の章で位相的場の理論のサイバーグ-ウィッテンモノポールの記述に用いられ，また後で出てくる BPS 粒子を基本的な場と捕らえなおす際には必要なので，ここでは用意しておく．

$$\begin{array}{ccc} & \psi_q & \\ {}^{Q_1}\nearrow & & \nwarrow^{Q_2} \\ q & & \tilde{q}^\dagger \\ {}_{Q_2}\nwarrow & & \nearrow_{Q_1} \\ & \psi_{\tilde{q}} & \end{array} \tag{2.2}$$

ここで $q, \tilde{q}$ は複素ボゾニックスカラー場で $\psi_q, \psi_{\tilde{q}}$ はワイルスピノルとする．今，ハイパー多重項は 1 組しか考えていないのでハイパー多重項の種類を識別する添字を付けていない（物理の論文ではハイパー多重項の組を「フレーバー」と書いていることが多い）．

ここで $\mathcal{N}=2$ の超対称性理論の特徴を列挙しておこう．この性質を導出するには摂動計算のテクニックや前章では解説をしていないレベルのくりこみの計算が必要である．しかし本質的には前章で見たような摂動計算の延長線上にある結果であるので，途中の過程はここでは省略する．よく知られた事実として受け止

められたし．

$\mathcal{N}=2$ の超対称性理論の特徴

（1）　「漸近自由な理論」：高エネルギーで摂動論が正確になる理論．

物質場の超対称多重項（ハイパー多重項）があまり多くない場合は，ゴムひもによる相互作用のように近距離（高エネルギー）で相互作用が弱く，自由場からの摂動で計算したものが有効である理論[1)]（前章の 1.6.4 節を参照）．遠距離では逆に強い結合状態となる．

（2）　2 ループ以上の摂動補正がない．

超対称性が高次の量子補正をキャンセルする．量子補正をプランク定数で展開すると展開次数がループの数と一致するので，摂動計算による補正が 1 次で終わると言ってもよい．

（3）　スカラー場のポテンシャルが 1 章 1.4 節のヒッグス機構のところで見た $V=\mathrm{tr}[\phi,\phi^\dagger]^2$ の形をしている[2)]．

つまりヒッグス機構でゲージ対称性が破れる理論になっている．破れの大きさをパラメトライズするパラメータとして，ゲージ不変なカシミア $u\equiv\mathrm{tr}\phi^2$ を用いることにする．スカラー場の真空期待値が，場の理論の真空（エネルギーの極小値）を特徴付けることから，u を真空のモジュライと呼ぶ．

（4）　プレポテンシャル $\mathcal{F}(z)$ が，z の正則関数である．

これは前章で見た通りである．

（5）　R 対称性と呼ばれる $\mathcal{N}=2$ 超対称性のフェルミオニック座標の回転対称性が存在する．

量子的な理論ではアノマリーにより対称性が部分的に破れ，古典論より対称性が小さい $\mathbb{Z}^8$ 変換に対して不変になっている．

[1)] 相互作用の強さは量子効果（くりこみ）により，考えているエネルギースケールにより変化する．$\mathcal{N}=2$ 超対称 $SU(N)$ ゲージ理論に含まれる基底表現のハイパー多重項の組の数が $2N$ より小さいときに，漸近自由であることが知られている．

[2)] これは (1.210) の作用の中の補助場 D を，ガウス積分，あるいは D の運動方程式で消去すると得られる．

以下ではこの性質は既知のものとして，有効作用についての考察をしていくことにする．

$u=\infty$ のまわり

初めに $u=\mathrm{tr}\phi^2$ の値が十分大きい場合を考えよう．$SU(2)$ のリー代数の生成子 $T^3,T^{\pm}$ で表すとする．

$$T^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad T^+=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad T^-=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

ヒッグス機構でゲージ群が破れた後 T^3 回転の $U(1)$ が残るとする（(1.59) とその後の部分の解説を参照）．つまり T^3 方向のヒッグス場が真空期待値を持ち $\langle\phi^3\rangle=a\neq 0$ $(u\propto a^2)$ の場合を考える．

ヒッグス機構の節 (1 章 1.4 節) で見たように，ゲージ場 $A_\mu^{\pm}$ の質量項が

$$\mathrm{tr}[A_\mu^{\pm}T^{\pm},\langle\phi^3\rangle T^3][A_\nu^{\mp}T^{\mp},\langle\phi^3\rangle T^3]g^{\mu\nu}=-4a^2A_\mu^{\pm}A^{\mp\mu} \tag{2.4}$$

であることから，$u\to\infty$ では，$A_\mu^{\pm}$ の質量も大きいことがわかる．質量の大きな粒子は作用の中の質量項以外は無視できる．さらに質量項はラグランジアンの中の 2 次の項なのでガウス積分が実行でき低エネルギーの有効理論には残らない．あるいは，質量が大きいとそれを動かすエネルギーが大きくなるため，物理に関係しなくなると考えてもよい[3]．つまり低エネルギー極限では，理論は質量 0 の場，すなわち T^3 方向の場 $(A_\mu^3,\lambda^3,\psi^3,\phi^3)$ で記述される．よってアーベリアン ($U(1)$) のゲージ対称性のある超対称ゲージ理論の作用の形として得られるはずである．前章で見たように，超対称性の要求から，複素スカラー超場 $\varPhi$ で書かれる有効作用は

$$L_{\mathrm{eff}}^{N=2}=\left[\frac{1}{8\pi i}\int \mathrm{d}^2\theta\ \frac{\partial^2\mathcal{F}(\varPhi)}{\partial\varPhi^2}W^{\alpha}W_{\alpha}+\frac{1}{4\pi i}\int \mathrm{d}^2\theta\mathrm{d}^2\overline{\theta}\ \varPhi^{\dagger}\frac{\partial\mathcal{F}(\varPhi)}{\partial\varPhi}\right]+h.c. \tag{2.5}$$

---

[3] 前章で見たように，今考えているウィルソン流の有効作用は，考えているエネルギースケールより高いエネルギーのモードを経路積分するという定義である（実際に積分して求められることは稀であるが）．したがって定義から，重い質量を持った粒子は経路積分してしまう必要がある（1.8 節参照）．

の形に制限された．(1.216) と比較して第 2 項に e^V がないのは，アーベリアン，つまり $U(1)$ ゲージ理論の場合，物質場は随伴表現だったのでゲージ場と可換になってしまい，相互作用していないことを意味している．$\mathcal{F}$ を具体的に求めることが有効作用を決定することになるのでそれが目標だ．前章でみたように，古典作用を出すには $\mathcal{F}(\Phi)=\dfrac{1}{2}\tau\Phi^2$ とすればよかった．有効作用は古典作用から量子効果で変形されているはずである．

サイバーグ-ウィッテン以前にわかっていたことをあげると，「（有効作用）＝（古典作用＋ 1 ループ効果）＋（インスタントン効果）」と計算され，その形もある程度特定されていて

$$\mathcal{F}=\frac{1}{2}\tau\Phi^2+\frac{i}{2\pi}\Phi^2\log\frac{\Phi^2}{\Lambda^2}+\sum_{k=1}\mathcal{F}_k\Phi^2\left(\frac{\Lambda}{\Phi}\right)^{4k} \tag{2.6}$$

と書かれる [20]．Λ はエネルギースケールに関係する定数である．第 1 項は古典作用，第 2 項は 1 ループ効果に対応している．第 3 項はインスタントンによる補正であり，これが非摂動効果で本書の主題である．今考えているのが $u\to\infty$ であり，別の言い方ではエネルギー（質量）スケールが大きいので，漸近自由の性質から摂動項が正しく得られる．また超対称性だけの結果として摂動的な量子補正が 1 ループだけであるという結果も (2.6) の導出には重要である．この摂動計算の結果については本書では導出しない [21]．あとは第 3 項のインスタントン効果 $\mathcal{F}_k$ を具体的に決めることが必要になる（これに関しては後で 2002 年にネクラソフの公式と呼ばれる重要な結果が得られたので 5 章でも再び見ることになる）．

$\mathcal{F}$ の決定方法

超対称が破れないと仮定して $\mathcal{F}$ を決定する方法を考えよう．この節では戦略だけを述べ実際の計算は後で行う．したがって，話の意味がわからない場合は気にせず流し読みしていただきたい．

作用正値性

作用（ラグランジアン）(2.5) を見るとわかるように，作用の特に運動項が含まれている部分 $\displaystyle\int d\theta^2\,\mathrm{Im}\frac{\partial^2\mathcal{F}(\Phi)}{\partial\Phi^2}W^\alpha W_\alpha$ の正定値性を保証するために条件がつ

く．$\int d\theta^2$ を実際に実行するとわかるように，運動項 $W^\alpha W_\alpha$ の前の係数はヒッグスの期待値 a を代入した $\mathrm{Im}\dfrac{\partial^2\mathcal{F}(a)}{\partial a^2}$ で与えられる．アーベリアンゲージ群の場合なら作用の正定値を保証するためには $\mathrm{Im}\dfrac{\partial^2\mathcal{F}(a)}{\partial a^2}>0$ が必要になる．これが $\mathcal{F}$ を決める条件になる．なぜなら大局的な正則な関数 $\mathcal{F}$ では，最大値の定理より定数以外ではなりたたないからである．したがって (2.6) は大局的に成立しない．実際 $|a|$ が小さいと (2.6) から $\mathrm{Im}\dfrac{\partial^2\mathcal{F}(a)}{\partial a^2}<0$ となってしまうことがわかる．

特異点

さらに (2.6) から a の無限遠の周りのモノドロミーを見ることで**特異点**を持つことがわかる．モジュライパラメータは $u=\mathrm{tr}a^2$ であったから，u 平面上での特異点が存在すると考えて，

$$a_D \equiv \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial a} \tag{2.7}$$

を導入して (a,a_D) のモノドロミーを調べるのである．これについては，後でもう一度詳しくみるので今は単に自明でないモノドロミーが存在すること，特異点が存在することを認める．今はこの特異点はどういう状況で生じるのかを考えることにする．1.8 節で見たように，特異点は質量の変化により生じる．サイバーグ-ウィッテンも，それを新しい質量のない粒子の出現によって起こると考えたのだ．以下で,「なぜそう考えたのか ?」「それは一体なんの粒子か ?」について考えてみよう．

古典的描像の実現は不可能

特異点が古典的描像であるゲージ対称性の回復によるものではないことを最初に見ておく．量子効果によって古典描像が再現されない系になっているという点で非常に面白い点である．特異点が存在することは認めたが，いったい何個存在するのであろうか？　試しに特異点が 1 個しかない状況を考えてみよう．ヒッグス機構より，

「原点＝ ($u=0$ となる点) ＝対称性が $SU(2)$ に戻る点」

であるから $A_\mu^\pm$ が質量 0 になる．つまり $A_\mu^\pm$ が今までは質量があったので有効作用の構成員から除外されていたが，前に議論したように質量が 0 になるのであれば当然有効作用に現れなければならない．突然力学変数を増やさなくてはならないのであるから特異点が生じるというわけである (1.8 節参照)．このシナリオは今の場合は正しいであろうか？　実はうまくいかない．これも後でモノドロミーを調べてわかる．

サイバーグ-ウィッテンの考えた描像

ゲージ対称性の復活により出現する特異点であるというシナリオがうまくいかないことを知ったサイバーグとウィッテンは「新しく現れる質量がない粒子は **BPS 粒子ではないか ?**」と考えたわけである．この新しいシナリオを理解するために,「有効作用」を求めることは後回しにして,「双対性」や「BPS」とは何かに焦点を当て，それらの性質について明らかにしていくことにする．

2.2　BPS 粒子

近年の素粒子論でもっとも重要な概念のひとつが「BPS 状態」である．例えば超弦理論では D-ブレーンが基本的には BPS 状態である．ここでは一度サイバーグ-ウィッテンを離れ，簡単な具体例を使って BPS 状態とは何かを見ていくことにする．特に場の理論で重要になる BPS 状態として，モノポール，ダイオンなどがある．

2.2.1　BPS 粒子（モノポールとダイオン）

簡単な例としてゲージ場とヒッグス場（スカラー場）からなる次の $SU(2)$ ゲージ理論の作用を考える．

$$L = \mathrm{tr}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu\phi D^\mu\phi\right) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{\ a}F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2}D_\mu\phi^a D^\mu\phi^a \tag{2.8}$$

ここではゲージ群の添字を $a,b,\cdots$ としてある．電場，磁場はゲージ曲率のなかの特定の成分として現れ，電場は $F^{0i}=E^i$ ($i=1,2,3$ 時間以外の空間 3 成分)，磁場は $\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{ij}=B^k$ で定義する．定義から電場と磁場はホッジ双対であること

がわかる．電場と磁場を使うとゲージ場の作用は

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}=\frac{E_i^2-B_i^2}{2} \tag{2.9}$$

と書くことができる．空間の添字 i についても，$E_i^2=\sum_{i=1,2,3}(E_i)^2$ のように和の記号を省略している。ゲージ場の正準共役量は $\pi^\mu=\frac{\partial L}{\partial(\partial_t A_\mu)}=F^{\mu 0}$ で，今の系のヒッグス場を除くゲージ場のハミルトニアン（エネルギー）は

$$\mathrm{tr}(\pi^\mu\partial_t A_\mu-L)=\mathrm{tr}\frac{E_i^2+B_i^2}{2} \tag{2.10}$$

である[4]．ヒッグス場の作用は $(D_0\phi)^2-(D_i\phi)^2$ より，ハミルトニアン（エネルギー）は $(D_0\phi)^2+(D_i\phi)^2$ である．0 が時間，i はその他の空間を表す添字だ．したがって，ゲージ場とヒッグス場を合わせた全エネルギー H は

$$H=\mathrm{tr}\frac{1}{2}\int d^3x(E_i^2+B_i^2+(D_0\phi)^2+(D_i\phi)^2) \tag{2.11}$$

である．エネルギーを最低にする解について見るために以下のような少し工夫した平方完成を行う．

$$H=\mathrm{tr}\frac{1}{2}\int d^3x\Big\{(D_0\phi)^2+(E_i-\sin\alpha D_i\phi)^2+(B_i-\cos\alpha D_i\phi)^2 \tag{2.12}$$

$$+2\sin\alpha E_iD_i\phi+2\cos\alpha B_iD_i\phi\Big\} \tag{2.13}$$

$$\geq \mathrm{tr}\ \Big\{\sin\alpha\int d^3xD_i\phi E_i+\cos\alpha\int d^3xD_i\phi B_i\Big\} \tag{2.14}$$

α は定数で，任意の α で上の不等式は成立している．後で見るように，(2.13) あるいは (2.14) はトポロジカルな電荷および磁荷に対応する部分である．したがって平方の部分 (2.12) が全部 0 の時，最低のエネルギーだから安定な解になる．

---

[4] (2.10) のハミルトニアンの導出には，拘束条件を未定乗数を用いて導入する必要がある．そのため 1 章の知識だけでは導出できない．なお，拘束条件の部分は (2.10) では省略している．このハミルトニアンを作用を計量で変分して得られるエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ から求めることも可能である．

$$D_0\phi^a = 0 \tag{2.15}$$

$$E_i^a = D_i\phi^a \sin\alpha \tag{2.16}$$

$$B_i^a = D_i\phi^a \cos\alpha \tag{2.17}$$

このようにして得られる方程式を BPS 方程式と呼び，その解を BPS 状態あるいは BPS 粒子と呼ぶ．

モノポール

モノポールとはもともと $U(1)$ ゲージ理論（マックスウェル理論，電磁気の理論）の N 極または S 極のみの磁荷をもつ粒子のことであったが，非アーベリアンゲージ理論の場合にも拡張されて定義される．以下ではモノポール（トフーフト-ポリヤコフ (G. 't Hooft - A. Polyakov) モノポール）について詳しく見てみよう．簡単のために，ゲージ群として $SU(2)$ の場合を扱う．$SU(2)$ が $U(1)$ に破れ T^3 方向のみ残っているとすると，磁荷を Q_m，電荷を 0 として

$$\int d^3x \partial_i B_i^3 = Q_m, \quad \int d^3x \partial_i E_i^3 = 0 \tag{2.18}$$

と書ける．一般には T^3 方向に限る必要はないので，ゲージ不変な量で磁荷を導入したほうが便利だ．ゲージ不変な磁荷 aQ_m を

$$\int d^3x \partial_i (\phi^a B_i^a) \tag{2.19}$$

で定義し，同様に電荷 aQ_e を

$$\int d^3x \partial_i (\phi^a E_i^a) \tag{2.20}$$

で定義する．ただし a はヒッグス ϕ の期待値なのだがここでは単に定数と思ってよい．この定義のもと，モノポールは

$$aQ_m = \int d^3x \partial_i (\phi^a B_i^a) \tag{2.21}$$

$$0 = \int d^3x \partial_i (\phi^a E_i^a) \tag{2.22}$$

を満たすエネルギーを最低にする BPS 方程式の解であると定義する．

ゲージ群 $SU(2)$ の構造定数が完全反対称テンソル ε^{abc} であることに注意して，(2.9) の A_0 での変分で得られる運動方程式を求めると

$$D_i E_i^a - \varepsilon^{abc}\phi^b D_0 \phi^c = 0 \tag{2.23}$$

であるから，(2.14) の第一項の積分は全微分の電荷である．

$$\int d^3x \mathrm{tr}\ D_i\phi E_i = \int d^3x \partial_i(\phi^a E_i^a) \tag{2.24}$$

したがって，モノポールの場合は第一項は 0 である．また第二項の積分は，ビアンキ (L. Bianchi) 恒等式 $d_A F = 0$ の $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ 比例成分から得られる恒等式 $D_i B_i = 0$ を用いて，

$$\int d^3x D_i\phi^a B_i^a = \int d^3x \mathrm{tr} D_i(\phi B_i) = \int d^3x \partial_i(\phi^a B_i^a) \tag{2.25}$$

である．したがってやはり全微分の磁荷となる．電荷と磁荷が (2.21), (2.22) であるとすると，(2.14) より

$$H \geq aQ_m \cos\alpha \tag{2.26}$$

である．α は任意なので $\cos\alpha$ を右辺が最大になるようにとると，

$$H \geq |aQ_m| \tag{2.27}$$

であるから，結局モノポールが存在すると**エネルギー（質量）が下から磁荷でバウンドされる**．BPS 方程式 (2.15)〜(2.17) の解でモノポールとなる解は以下のように実際に与えられる．

$$A_i^a = \varepsilon_{aij} x^j \frac{1}{r^2}\left[1 - \frac{vr}{\sinh(vr)}\right] \tag{2.28}$$

$$\phi^a = x^a\left(-\frac{v}{r}\frac{\cosh(vr)}{\sinh(vr)} + \frac{1}{r^2}\right) \tag{2.29}$$

$$A_0^a = 0 \tag{2.30}$$

ただし $r = |x|$, v は定数で $r \to \infty$ で ϕ が収束する値である．

ダイオン

次にもう一つの BPS 状態であるダイオンについて考える．ダイオンは，磁荷 Q_m と電荷 Q_e を両方持つソリトン解で，

$$\int d^3x D_i\phi B_i = aQ_m, \qquad \int d^3x D_i\phi E_i = aQ_e, \tag{2.31}$$

どちらも 0 ではない．

モノポールと同様にエネルギーの不等式を

$$H \geq a(Q_e \sin\alpha + Q_m \cos\alpha) \tag{2.32}$$

と書き，右辺が最大になるように α を以下のように選ぶ

$$\cos\alpha = \frac{Q_m}{\sqrt{Q_e^2+Q_m^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{Q_e}{\sqrt{Q_e^2+Q_m^2}}. \tag{2.33}$$

(2.33) を (2.32) に代入して

$$H \geq a\sqrt{Q_e^2+Q_m^2} \tag{2.34}$$

となる．等号が成立する条件である BPS 方程式 (2.15), (2.16), (2.17) はモノポールの場合と同じだ．それを解くとモノポール同様に解を得ることも可能である．

BPS 粒子の質量

以上の考察から磁荷 Q_m と電荷 Q_e が存在するとき, BPS 粒子の質量がわかる．エネルギーと質量は等価であったことを思い出すと, (2.34) の等号成立条件式の解である BPS 粒子の質量は電荷と磁荷で書け

$$M = a\sqrt{Q_e^2+Q_m^2} \tag{2.35}$$

となる．

出発点の作用はゲージ場とヒッグス粒子が存在する場合の一般的なものであるから, ゲージ場とヒッグス場の系では同様のソリトン解が一般的に存在することが理解されるであろう．特にエネルギー（質量）を下から電荷と磁荷を用いてバ

ウンドしているのが特徴である．こうした事情はサイバーグ-ウィッテン理論でも全く変わらない．次節では，$\mathcal{N}=2$ の超対称理論のなかでこの現象がいかに起こるかを見ることにする．

2.2.2 $\mathcal{N}=2$ 超対称ヤン-ミルズ理論の BPS 状態

前章で求めた $\mathcal{N}=2$ の古典作用 (1.210) を，成分でもう一度書いておくと，

$$-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}+\frac{i}{2}\lambda^a\sigma^\mu D_\mu\bar{\lambda}^a+\frac{i}{2}\psi^a\sigma^\mu D_\mu\bar{\psi}^a+\frac{1}{2}D_\mu\bar{\phi}^a D^\mu\phi^a+\frac{1}{2}[\phi,\bar{\phi}]^a[\phi,\bar{\phi}]^a+\cdots \tag{2.36}$$

だった[5]．ただし，補助場の積分は実行した（つまり経路積分のガウス積分を実行するか，あるいは運動方程式を用いて消去した）．フェルミオンの真空期待値は普通 0 にとるので

$$\langle\lambda^a\rangle=\langle\psi^a\rangle=0 \tag{2.37}$$

とする．スカラー場の虚部が 0 であるような解を探すことにすると，$[\phi,\bar{\phi}]^a[\phi,\bar{\phi}]^a=0$ なのでボゾニックな作用は

$$-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}+\frac{1}{2}D_\mu\phi^a_R D^\mu\phi^a_R \qquad (\phi^a_R=\mathrm{Re}\phi^a) \tag{2.38}$$

となり，これは前節 (2.8) と全く同じである．したがって前節の解がそのまま BPS 解になる．以下に超対称性と BPS の関係を見ていこう．

BPS 状態の性質

（1） BPS は超対称性の半分で不変

$\mathcal{N}=2$ 超対称変換の二つのパラメータを (ξ_1,ξ_2) とする．これらはグラスマン奇で 2 成分スピノルである．解を超対称変換するとどうなるか？

$$\delta A^a_\mu=\delta\phi^a=0 \tag{2.39}$$

である．なぜなら古典解では，フェルミオンの真空期待値を 0 としたので，ボ

---

[5] (1.210) と符号が異なるところは，例によってミンコフスキー計量の選び方に起因している．

ゾンを超対称変換すると 0 になるからである．フェルミオン (λ,ψ) をまとめて $\psi^i(i=1,2)$ と書くことにすると[6)]，ψ^i の超対称の変換は，あらわに書くと

$$\delta\psi_\alpha^{ia}=(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta\xi_\beta^i F_{\mu\nu}^a+\sqrt{2}i\varepsilon^{ij}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}_j^{\dot{\alpha}}D_\mu\phi^a+[\phi,\bar{\phi}]^a\xi_\alpha^i \tag{2.40}$$

ここで $\mathrm{Im}\phi=0$ すなわち $[\phi,\bar{\phi}]=0$, および BPS 方程式の解であることを使う．例えば BPS モノポールは方程式

$$E_i^a=D_i\phi_R^a\cos\alpha \tag{2.41}$$

$$B_i^a=D_i\phi_R^a\sin\alpha \tag{2.42}$$

を満たすものであったので，(2.40) に代入すると，

$$\delta\psi_\alpha^{ia}=\sum_{\beta=\dot{\beta}=1}^{2}(\sigma^j)_\alpha{}^{\dot{\beta}}D_j\phi\ (\xi_\beta^i e^{-i\alpha}-\sqrt{2}i\bar{\xi}_{\dot{\beta}j}\varepsilon^{ij}) \tag{2.43}$$

となる．添字について注意すると，σ^j, D_j の $j=1,2,3$ は時間を除いた空間の 3 成分を表し，$\xi^i,\bar{\xi}_j$ は $\mathcal{N}=2$ に起因する 2 種類のフェルミオニックな座標を意味する $i=1,2$ である．間違えないとは思うが，2 成分スピノルの添字の α と BPS 方程式を導出する際の混合角の $e^{-i\alpha}$ の中の α が異なることも注意しておく．また，上式を得るには，$\dfrac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\sigma_{jk}=\dfrac{1}{2i}\sigma^i$, および $\sigma^{0i}=\dfrac{1}{2}\sigma^i$ という公式を用いる．

結局

$$\xi_\beta^i e^{-i\alpha}=\sqrt{2}i\bar{\xi}_{\dot{\beta}j}\varepsilon^{ij} \tag{2.44}$$

という関係式を満たすとき，(2.43) 式$=0$ を満たす．つまり，BPS 状態は二つの超対称変換で独立に変換すると不変ではないが，組み合わせを調節することで半分の SUSY で不変になっていることがわかる．これが $\mathcal{N}=2$ 超対称性理論の BPS 状態を考察する上では，重要な性質である．このことは理論の詳細なモデルによらず，超対称代数の性質からある程度決まることがわかる．それを次に見てみる．

---

6) つまり $\lambda=\psi^1,\psi=\psi^2$ としたのであるが，$\psi^i(i=1,2)$ は R-対称性すなわちフェルミオニックな座標 θ^i の回転対称性を持つので，区別する必要はない．

(2) 量子論で質量に下限が存在

$\mathcal{N}=2$ 超対称性が質量に下限を生み出す場合があり，それが電荷や磁荷と関係があることを見る．セントラルチャージ Z の存在がそのポイントとなる．(1.204) の超対称代数を思い出し，特に運動量 $(P_\mu)=(m,0,0,0)$ ととると $\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}P_\mu=m\sigma^0_{\alpha\dot{\beta}}$ であるから

$$\{Q^i_\alpha,\bar{Q}^j_{\dot{\beta}}\}=2m\delta^{ij}\delta_{\alpha\dot{\beta}},\qquad \{Q_{1\alpha},Q_{2\beta}\}=-2\sqrt{2}\varepsilon_{\alpha\beta}Z \tag{2.45}$$

となる．

$$\{Q_{1\alpha},Q^\beta_2\}=\varepsilon^{\beta\gamma}\{Q_{1\alpha},Q_{2\gamma}\}=-2\sqrt{2}\varepsilon^{\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\gamma}Z=-2\sqrt{2}\delta_{\alpha\beta}Z \tag{2.46}$$

であることを用いて，超対称変換の生成子の組 $e^{-i\alpha}Q_{1\beta}+\bar{Q}^{\dot{\beta}}_2$ とその複素共役（ここでは複素共役を $\bar{Q}_{i\dot{\alpha}}=(Q_{i\alpha})^*$ と書く）との正定値となる反交換関係を計算する．

$$\begin{aligned}0&\leq\{e^{-i\alpha}Q_{1\beta}+\bar{Q}^{\dot{\beta}}_2,(e^{-i\alpha}Q_{1\delta}+\bar{Q}^{\dot{\delta}}_2)^*\}\\&=\delta_{\beta\delta}[2m+2m+2\sqrt{2}Ze^{-i\alpha}+2\sqrt{2}\bar{Z}e^{i\alpha}]\\&=4(m-\sqrt{2}|Z|)\delta_{\beta\delta}\end{aligned} \tag{2.47}$$

ただし，$Ze^{-i\alpha}=-|Z|$ となるように α を選んだ．これが BPS が半分の超対称性を満たす条件でちょうど等号が成立することに注意されたし．

また，詳細は省略するがセントラルチャージ Z は電荷と磁荷を用いて

$$Z=a(Q_e+\tau Q_m)=aQ_e+a_DQ_m \tag{2.48}$$

と書くことができることがわかっている．ただし a はヒッグスの期待値とした．2 番目の式は $a_D=\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial a}$ としている．結局 BPS 状態 (BPS ダイオン）の質量は，

$$m\geq\sqrt{2}|Z| \tag{2.49}$$

であり，下限が存在することが示された．等号が成立するとき，**BPS 飽和**と言う．超対称が量子論でも成り立つのであれば，今の議論は純粋に超対称代数の計算から言えた事実なので，**量子論的にも成立**する議論である．つまり BPS 状態あるいは BPS 粒子は，古典理論から量子効果を取り入れた量子論に移行しても

安定して存在すると言える．

2.3 双対性

プレポテンシャルの特異点としてどのようなものを考えるかという議論にもどろう．BPS 粒子は量子効果を考えても安定に存在することを前節で見た．しかも (2.49) から $Z=0$ で BPS 粒子の質量が 0 になるという特異点がでることも判明した．つまり，質量のない粒子だけで低エネルギー有効作用を書いているのだが，$Z=0$ で質量 0 の新粒子として BPS 粒子が新しい自由度として現れるという意味で特異点なのである．BPS 状態は 2 種類あって，それぞれダイオン（例えば電荷，磁化が $Q_e=1$, $Q_m=1$, $a+a_D=0$ のようなもの）とモノポール ($Q_e=0$, $Q_m=1$, $a_D=0$) であった．

ここで，どういった思想で双対性を考えるかを述べることにする．例えばモノポールが 0 質量となる近傍では，**「今までの場（例えば $u=\infty$ の近傍で現れていた場）を用いて理論を表すのではなく，モノポールの場とその他に登場する質量 0 の粒子の超対称な多重項で理論を書き換えるべし」**というのがバックボーンである．つまり有効作用はそれぞれの特異点の周りで異なる場を用いて表されていて，それらを張り合わせるのが「双対変換」であると言える．

もともと $\mathcal{F}$ **は大局的には書けない**のであったから，別の理論で書くのは自然なことと言える．もともとの場では，強結合領域であるため，どのように記述できるか全く見当もつかないが，モノポールなどの BPS 粒子が基本粒子になりその記述では弱結合になると予想されるのである．

双対変換

では $\mathcal{N}=2$ 超対称性があるときに，強結合領域を表す理論を探るヒントはさらに何があるだろうか？　ここでもやはり $\mathcal{N}=2$ 超対称性が強力に効いてくる性質がある．それが双対性 (duality) である．有効理論の作用は (2.5) の

$$\left[\frac{1}{8\pi i}\int \mathrm{d}^2\theta\ \frac{\partial^2\mathcal{F}(\Phi)}{\partial\Phi^2}W^\alpha W_\alpha+\frac{1}{4\pi i}\int \mathrm{d}^2\theta \mathrm{d}^2\overline{\theta}\ \Phi^\dagger\frac{\partial\mathcal{F}(\Phi)}{\partial\Phi}\right]+h.c.$$

であった．超対称性が存在する限り，場の理論で記述される有効作用はこの形を

していなければいけない．強結合と弱結合どちらの場合もこのような形のはずと考えられる．理論同士を結びつけ張り合わせる変換はどのようなものがあるだろう．双対な場を Φ_D と $\mathcal{F}(\Phi)$ のルジャンドル変換 (A.M. Legendre) を

$$\Phi_D \equiv \frac{\partial \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi}, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}_D(\Phi_D)}{\partial \Phi_D} \equiv -\Phi \tag{2.50}$$

で定義する．このとき有効作用 (2.5) の第 2 項は $\int \mathrm{d}^2\theta \mathrm{d}^2\overline{\theta}\ \Phi_D^\dagger \dfrac{\partial \mathcal{F}_D(\Phi_D)}{\partial \Phi_D}$ と等しい．

一方で第一項 $\int \mathrm{d}^2\theta\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi^2} W^\alpha W_\alpha$ はどうだろうか．$W_\alpha \equiv -\dfrac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha V$ だったので V の経路積分も含めて書くと

$$\int \mathcal{D}V \exp\left\{\frac{1}{8\pi i}\mathrm{Im}\int \mathrm{d}^2\theta\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi^2} W^\alpha W_\alpha\right\} \tag{2.51}$$

である．変数を V から W_α に変えてみる．ただしその際ビアンキ恒等式の超対称版 ($dF=0$ を含む恒等式）である

$$\mathrm{Im}\ D_\alpha W^\alpha = 0 \tag{2.52}$$

を拘束条件としてつける必要がある．これが通常のビアンキ恒等式を含んでいることはここでは認めることにする．この拘束条件をラグランジュ未定乗数 V_D を用いて導入することで，V から W に変数変換すると

$$\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}V \exp\left\{\frac{1}{8\pi i}\mathrm{Im}\int d^2\theta \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi^2} W^\alpha W_\alpha\right\} \\
&\quad \sim \int \mathcal{D}W \mathcal{D}V_D \exp\left\{\frac{1}{8\pi i}\mathrm{Im}\int d^2\theta \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi^2} W^\alpha W_\alpha \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{8\pi i}\mathrm{Im}\int \mathrm{d}^2\theta \mathrm{d}^2\overline{\theta}\ V_D D_\alpha W^\alpha \right\}
\end{aligned} \tag{2.53}$$

となる．空間積分のなかでは $\int d\bar{\theta}^2 = -\bar{D}^2$ と書けることから

$$W_{D\alpha} \equiv -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha V_D \tag{2.54}$$

とすると，$\int d^2\theta d^2\bar{\theta} V_D D_\alpha W^\alpha = -4\int d^2\theta \int \mathrm{d}^2\theta\ W_{D\alpha}W^\alpha$ と書ける．この書き換えの後 W でガウス積分を実行すると

$$\int \mathcal{D}V_D \exp\frac{1}{8\pi i}\mathrm{Im}\int \mathrm{d}^2\theta \left(-\frac{\partial^2\mathcal{F}(\Phi)}{\partial\Phi^2}\right)^{-1} W_D^\alpha W_{D\alpha} \tag{2.55}$$

となる．

ここでゲージ理論の結合定数 τ が $W^\alpha W_\alpha$ の係数であることを思い出そう．実際，古典理論を再現するには $\mathcal{F}(\Phi)=\tau\Phi^2$ とすればよかったので，有効作用 (2.5) の結合定数は $\dfrac{\partial^2\mathcal{F}(\Phi)}{\partial\Phi^2}=\tau$ であった．量子論の場合も τ が $W^\alpha W_\alpha$ の係数で結合が見てとれるが，(2.55) で重要なのは結合定数が (2.51) の逆になっていることだ．添字 D のついた場への変換を**「双対変換」**と呼ぶことにすると，双対変換では確かに結合定数（有効結合定数）同士の関係は

$$\frac{\partial^2\mathcal{F}_D(\Phi_D)}{\partial{\Phi_D}^2} = -\frac{d\Phi}{d\Phi_D} = -\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}(\Phi)}{\partial\Phi^2}\right)^{-1} \tag{2.56}$$

となり，強結合と弱結合を入れ替える変換になっている．そしてこの「双対変換」

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_D \\ \Phi \end{pmatrix} \tag{2.57}$$

のもとで有効作用の形は変わらないのである．

実は他にも対称性があることが以下のようにわかる．(2.5) の有効作用を Φ_D を用いて書き直すと

$$\left[\frac{1}{8\pi i}\int \mathrm{d}^2\theta\ \frac{d\Phi_D}{d\Phi}W^\alpha W_\alpha + \frac{1}{4\pi i}\int \mathrm{d}^2\theta \mathrm{d}^2\overline{\theta}\ \Phi^\dagger\Phi_D\right] + h.c. \tag{2.58}$$

と書ける．これは $\Phi_D \to \Phi_D + n\Phi$, $n\in\mathbb{Z}$ の元で不変である．(2.58) 第 2 項とその複素共役の和は明らかにこの変換のもとで不変である．第一項にはこの変換の変化分として $n\mathrm{Im}\int \mathrm{d}^2\theta\ W^\alpha W_\alpha = -n\int F\wedge F$ という量が表れるが，インスタントン数が整数値であるから 2π の整数倍だけが変化分として出てくるのだ．有効作用が exp の肩に乗ることを考えると，この変化分は無視していいことがわ

かる[7]．つまり

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_D \\ \Phi \end{pmatrix} \tag{2.59}$$

のもとで不変である．(2.57) と (2.59) を合わせて，結局 $SL(2,\mathbb{Z})$ のもとで不変となっていることがわかる．結局問題は，この双対変換 $SL(2,\mathbb{Z})$ のもとでうまく理論を張り合わせて $\mathcal{F}$ を決定することとなる．

しかし超場形式での双対変換は簡単で美しい反面，超場の成分の場であるゲージ場などがどのように変換されているのかわからないので，物理的な状況がわかりにくい．そこで雰囲気をつかむために簡単な双対変換の例をみることにする．例えば $A_\mu \Longleftrightarrow A_{D\mu}$，$\tau \Longleftrightarrow \dfrac{-1}{\tau} = \tau_D$, などというのが双対変換に含まれる．場とカップリング定数を置き換えることに対応していて作用も

$$L = \frac{1}{\tau} F_D^{\mu\nu} F_{D\mu\nu} + \frac{1}{\tau} \bar{\lambda}_D \not{D} \lambda_D + \cdots$$

という双対な場で書かれることになる．特にゲージ理論の作用の経路積分の部分が，双対変換でどのように変換されているかを見てみよう．

$$\int \mathcal{D}A \, \exp\Bigl(i \int \tau (F + iF^*)^2\Bigr) \tag{2.60}$$

この経路積分に対して，超場のときに V ではなく W の場とみなしたのと同様に，ゲージ場 A_μ ではなく曲率 F を場とみなす．そのために補助場 $A_{D\mu}$ を使い，ビアンキ恒等式をラグランジュ未定係数法で導入すると

$$\int \mathcal{D}A_D \mathcal{D}F \, \exp\Bigl(\int \tau (F + iF^*)^2 + A_D * (dF)\Bigr) \tag{2.61}$$

と書ける．ここで F をガウス積分すると

$$\int \mathcal{D}A_D \, \exp\Bigl(i \int \frac{-1}{\tau} (F_D + iF_D^*)^2\Bigr) \tag{2.62}$$

となる．ここで F_D は双対な場 A_D の曲率とした．積分のときに

---

[7]有効作用は，exp の肩にのっている作用に対してあるエネルギースケール以上の場の振動モードを経路積分してしまうことで得られる．それ以下のエネルギーの場で記述される部分と，経路積分の実行によって出てきた項を exp の肩に乗せなおして得られるのである．

$$F+i*F=\frac{-1}{\tau}*(F_D+i*F_D) \tag{2.63}$$

を使っている．時間を除く空間の座標を表す添字を i として，F_{0i} が電場で，F_{ij} が磁場であったことを思い出すと電荷と磁荷が入れ替わっている．これが今扱っている双対性が電磁双対性と呼ばれるゆえんでもある．また**結合定数が逆数** $\frac{-1}{\tau}$ **になる**こともわかる．つまり「**強結合と弱結合の入れ替え**」に対する対称性が示されている．ちなみにセントラルチャージもこの変換で不変であることも知られている．

次節では，この双対性の情報を元にプレポテンシャル $\mathcal{F}$ の正体を探ることにする．

2.4　モノドロミー問題

特異点の議論が不十分だったのでまずその問題を考える．

スカラー粒子の真空期待値 $\langle\phi\rangle=a$ の値が非常に大きい，つまり漸近自由な領域では，プレポテンシャル $\mathcal{F}(\Phi)$ の摂動論で得られる部分は計算可能で

$$\frac{i}{2\pi}\Phi^2\log\frac{\Phi^2}{\Lambda^2}$$

であった．$a_D=\frac{\partial\mathcal{F}(a)}{\partial a}$ であるから $u=\langle\mathrm{tr}\phi^2\rangle\to\infty$ の領域では，$\Phi=a$ としたものを a で微分して，

$$a_D(u)=\frac{i}{\pi}a\left(\log\left(\frac{a^2}{\Lambda^2}\right)+1\right) \tag{2.64}$$

となる．u 平面で $u\to e^{2\pi i}u$ としたときのモノドロミー行列を考えると $a\to -a$ で

$$a_D\longrightarrow\frac{i}{\pi}(-a)\left(\log\left(\frac{a^2}{\Lambda^2}\right)+1+2\pi i\right)=-a_D+2a \tag{2.65}$$

であるから結局モノドロミー行列は

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix}\longrightarrow M_\infty\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix},\qquad M_\infty=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.66}$$

が得られる[8]．この結果は前節の双対性の $SL(2,\mathbb{Z})$ に含まれることは見た通りである．$u=\infty$ 以外の特異点はいくつあるだろうか？　これは次のように考えられる．

まず特異点が 2 個 ($u=\infty$ 以外に 1 個) であると仮定する．前に述べたように $\mathcal{N}=2$ 超対称性ゲージ理論は $\mathbb{Z}^8$ 変換に対して不変になっている．この不変性から特異点が 2 個と仮定すると残りの特異点は原点でなければならない．なぜなら $\mathbb{Z}^8$ 不変性は u に対しては $u\to -u$ という変換のもとで不変であることを要請する．したがって特異点が $u=\infty$ 以外に 1 個しかないのであればそれは原点ということになる．この描像は一見とても自然に見える．というのは原点 $u=0$ では，とりもなおさずヒッグスの真空期待値が 0 であるということである．ヒッグス機構のところを思い出してほしいのだが，ゲージ対称性の自発的破れはヒッグスの真空期待値が 0 でないことが原因で起こった．つまり原点 $u=0$ でゲージ対称性が $U(1)$ から破れる前の $SU(2)$ に戻ることを意味するわけであり，当然質量のない粒子が突然増えるわけである．

ヒッグス機構の説明のところの例にならうと，$\langle\phi^3\rangle\neq 0$ のときゲージ場 A_μ^1, A_μ^2 が質量を持っていたので，その場合質量のない粒子だけで記述される低エネルギー有効作用にはこれらは含まれない．$\langle\phi^3\rangle\to 0$ で A_μ^1, A_μ^2 が有効作用にはない質量のない粒子の出現を意味するので，これは確かに特異点になるはずである．

しかしこのような古典的なゲージ対称性の復活の描像は以下の理由により否定される．というのは特異点が原点と無限遠点の 2 点ならば，無限遠点の周りのモノドロミー M_∞ と原点の周りの M_0 が一致しなければならない．このとき $a\to -a$ であったので，例えば a^2 はモノドロミーの影響を受けない．つまり a^2 は良い大局的な座標であるということになる．しかしこれは 2.1 節の作用正値性のところで述べた「大局的には記述できない」ことに反している．したがって古典的ゲージ理論では当たり前の「ゲージ対称性の回復」が**低エネルギー有効理論では起こらない**のである．この事実は非常に面白い現象である．

実は特異点が 4 つ以上の場合もうまくいかないことを実際に計算して確認す

---

[8] 極を分岐点とする多価関数 $a_i(z)$ を考える．極をまわる閉曲線 C で z を動かしたときの a_i を a_i^C と書くことにする．$a_i^C=M_{ij}a_j$ と表されるとき，M_{ij} をモノドロミー行列と呼ぶ．つまり，分岐の様子を表したものがモノドロミー行列だ．

ることができる．これらの事実から特異点は無限遠点とゼロでない u_0 と $-u_0$ であることがわかる．そしてこの特異点で現れる質量のない粒子はソリトンであるBPS 粒子，つまり前節にあったモノポールとダイオンであると予想することはもはやそれほど突飛ではないだろう．

ここまでの情報で問題を明示しておこう．

（1） 複素解析的でその引数について正則な $\mathcal{F}$ を求めることが目的であり，これが $\mathcal{N}=2$ の超対称ゲージ理論の低エネルギー有効作用を決定する．

（2） $\mathcal{F}$ を求めるにはその微分で定義される (a,a_D) を求めるとよいが，(a,a_D) はモノドロミー群として $SL(2,\mathbb{Z})$ で変換される．

（3） τ を $\tau\equiv\dfrac{\partial a_D}{\partial a}=\dfrac{\partial^2\mathcal{F}(a)}{\partial a^2}$ のように定義し，作用の運動項の正定値性から $\mathrm{Im}\tau(a)>0$ が要請される．

このモノドロミー問題を考えるわけであるが，ここでトーラス（楕円曲線）のモジュライ理論を思い出すことが有益である．なぜなら，全く同じモノドロミー問題として同一視できるからだ．楕円曲線を複素変数 z,y を用いて

$$y^2=(z^2-u)^2-4\Lambda^2=\prod_{i=1}^{2}(z-\alpha_i^-)(z-\alpha_i^+) \tag{2.67}$$
$$\alpha_1^-=-\sqrt{u+2\Lambda^2},\qquad \alpha_1^+=-\sqrt{u-2\Lambda^2}$$
$$\alpha_2^-=\sqrt{u-2\Lambda^2},\qquad \alpha_2^+=\sqrt{u+2\Lambda^2}$$

で与える．カットの入れ方として $[\alpha_1^-,\alpha_1^+]$, $[\alpha_2^-,\alpha_2^+]$ と選んでおく．図 2.1 のように $[\alpha_1^-,\alpha_1^+]$ を囲むサイクルを α とし，それと組んで 1 次元ホモロジー直交基底となるサイクルを β とする．

図 2.1 でカットが 2 個開いているので，1 枚の平面はシリンダーに対応している．それを張り合わせるから図 2.2 のトーラスを表すことがわかるであろう．周期積分を以下のように定義する．

$$\omega=\oint_\alpha\frac{dz}{y}\ ,\ \ \omega_D=\oint_\beta\frac{dz}{y}. \tag{2.68}$$

このとき (ω,ω_D) のモノドロミー群は $SL(2,\mathbb{Z})$ であった．さらにモジュライ $\tau=\dfrac{\omega_D}{\omega}$ の虚部の正定値性 $\mathrm{Im}\tau>0$ は非特異な場合には保証されていることが知られ

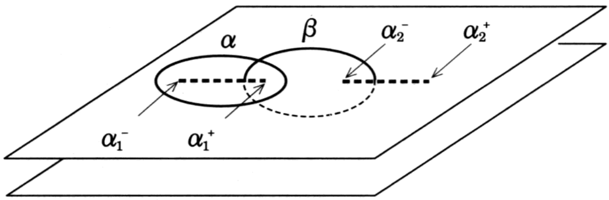


図 2.1　α サイクルと β サイクル

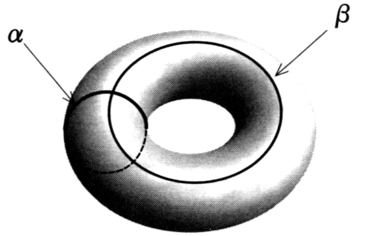


図 2.2　α サイクルと β サイクル

ている.

この楕円曲線のモノドロミー問題を $\mathcal{N}=2$ の超対称ゲージ理論のモノドロミー問題を比べてみると，同じ問題であることがわかる．$\tau(a)\equiv\dfrac{\partial a_D}{\partial a}$ と $\tau=\dfrac{\omega_D}{\omega}$ を同一視していいだろう．そう考えるためには，a,a_D がモジュライ u で決まり

$$\tau(a)=\frac{\partial a_D}{\partial a}=\frac{\partial a_D}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial a},\qquad 2\pi i\frac{\partial a_D}{\partial u}=\omega,\qquad 2\pi i\frac{\partial a}{\partial u}=\omega_D \tag{2.69}$$

であると思えばいい．こうしてリーマン面の問題として置き換えることができた．楕円積分を用いて (a,a_D) を求めることができるのである．(2.69) から

$$a(u)=\oint_\alpha ds,\qquad a_D(u)=\oint_\beta ds\quad ただし\quad ds:=\frac{1}{\pi i}z^2\frac{dz}{y} \tag{2.70}$$

であることがわかる．実際にこれら (2.70) を u 微分して曲線の定義式 (2.67) を用い，また部分積分を用いれば (2.68) が得られる．この積分が求められれば，$\mathcal{F}=$

$\int a_D da$ より $\mathcal{F}$ も求まることになり，有効作用が与えられたことになるのだ．

しかし計算方法が与えられたからといって，計算が簡単に実行できるわけではない．実際の計算では (2.70) を直接積分するより，むしろ周期がピカール-フックス方程式 (E. Picard, L. Fuchs) の解の系になることを利用して計算された [17]. どちらにしても実際インスタントン数が大きくなるにつれて非常に難しい計算であった．しかし 2002 年に「ネクラソフの公式」が与えられ，全く異なる方法により計算されることになる．これについては，5 章で見ることにする．したがってここでは，これ以上具体的に計算することは行わない．他の方法で計算が実行されたからといって，双対性の概念が重要であるという事実は変わらない．

ここでモノドロミー問題が解決されたことの確認のために，特異点について再び考察することにする．モジュライ u を動かしていくと，サイクルが消滅する点で特異点が生じる．例えば (2.67) より，$u=2\Lambda^2$ では $\alpha_1^+=\alpha_2^-$ となることから β サイクルがつぶれてしまう．u 平面でこの特異点のまわりを一周することは平方である α_1^+ と α_2^- を入れ替えることになるので β サイクルはそのままだが，α サイクルは $\alpha-\beta$ に変換される．つまりモノドロミーの作用は

$$M_1\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$$

であり，やはり $SL(2,\mathbb{Z})$ に含まれている．ω と ω_D, あるいは a と a_D についてのモノドロミーも積分のサイクルによって引き起こされるから，やはり期待通りに $SL(2,\mathbb{Z})$ に含まれている．同様にサイクルが潰れるのは $u=-2\Lambda^2$ の点である．この点は α_1^- と α_2^+ が同一点となるために $\beta-2\alpha$ サイクルが潰れて特異点となる．また $u=\infty$ では $\alpha_1^-=\alpha_1^+$ と $\alpha_2^-=\alpha_2^+$ となり，全てのサイクルが潰れる特異点となっている．これらに対しても先ほど同様モノドロミー作用は容易に計算でき，$SL(2,\mathbb{Z})$ に含まれていることもわかる．それぞれのモノドロミー変換行列を M_2 と M_∞ とすると，$M_\infty=M_1M_2$ であることも確かめられ，特異点が 3 個で矛盾なく解が求まることがわかる．

$SU(2)$ の場合に限って説明を試みてきたが，リーマン面の選び方によってさまざまなゲージ群の場合について同様に計算されることがわかっている．本書で

は $SU(N)$ の場合のみ紹介しておこう．

$$P_N(z) := z^N + \sum_{l=0}^{N-2} u_{l+2} z^{N-(l+2)}, \qquad P_N^2(z) - 4\Lambda^{2N} = \prod_{l=1}^{N} (z-\alpha_l^-)(z-\alpha_l^+) \tag{2.71}$$

を用いてサイバーグ-ウィッテン曲線を

$$\Lambda^N\left(w+\frac{1}{w}\right) = P_N(z) \tag{2.72}$$

で定義する．$N=2$ の場合には $w=(y+P_N)/2\Lambda^N$ とおくことで (2.67) が再現されることに注意せよ．(a_l, a_{Dl}) は以下で与えられる．

$$a_l = \oint_{\alpha_l} ds, \qquad a_{Dl} = \oint_{\beta_l} ds \quad \text{ただし} \quad ds := \frac{1}{2\pi i} z \frac{dw}{w} \tag{2.73}$$

$N=2$ の (2.70) との対応も $w=(y+P_N)/2\Lambda^N$ から再現される[9)]．α_l , β_l のサイクルも l 番目のカットを囲むサイクルと l 番目と $l+1$ 番目のカットをまたぐサイクルを図 2.1 のときと同様に素直に拡張したものである．この積分を求めることによって，やはりプレポテンシャル $\mathcal{F}$ が計算される．

こうして $\mathcal{N}=2$ の超対称ゲージ理論の有効作用が，低エネルギーの場合とは言え，完全に決定されたことは衝撃的であった．非摂動的な効果は，多くの場合手に負えないからである．双対性という，一部の簡単なモデルでのみ知られていた現象が，ゲージ理論という複雑そうな理論でも成立するという予想がもたらした結果である．しかしここでも $\mathcal{N}=2$ の超対称性によって劇的に理論を単純化しているという福音のなせる業であることは間違いのないことで，実際にサイバーグ-ウィッテン理論は可積分系としての理解もされている [19].

こうして双対性の威力を目の当たりにした物理学者は，その後の 10 年を双対性の拡張に奔走したと言っていい．そしてそれは実際多くの革命を起こし，94 年を境に多くの理論が異なる様相を呈した．例えば超弦理論がその最たるもので，弦と双対なオブジェクトである D-ブレーンの登場により，すでに「弦」理論と呼ぶのははばかられるくらい，いろいろなオブジェクトを基本のオブジェクトと

---

9) 5 章との対応を見やすいように，ここでは書き換えられている．通常の表記と定数倍の違いがあるのもそのためである．

する理論による記述が可能となった．その結果としてゲージ理論自身もさらに発展していくことになった．

例えば，$\mathcal{N}=2$ の超対称ゲージ理論の有効作用の背景にサイバーグ-ウィッテン曲線のような幾何学が潜んでいる事実から，$\mathcal{N}=2$ の超対称ゲージ理論がもっと幾何学的な背景を持って理解されるべきではないかとだれしも考えるであろう．それは実際に可能で，特に弦理論の有効理論としてとらえると非常に直接的に楕円曲線の起源が説明される．

しかしその説明には弦理論の多くの知識が必要となるのでここでは紹介ができない．例えば [17] などを参照してもらいたい．その他にもゲージ理論と弦理論あるいは重力理論の双対な関係など，現在もなお発展中である．弦理論とゲージ理論の関係に深く関わっている問題であるが，5 章では，全く異なる方法を用いてより簡単に $\mathcal{F}$ を決定する方法について述べる．その方法を学ぶためには，次の章の位相的場の理論について知る必要がある．

第 3 章

位相的場の理論

この章では位相的場の理論を経路積分形式で定式化する．特に 4 次元の微分位相幾何学の中心的な役割を果たすドナルドソン理論とサイバーグ-ウィッテン理論，それとヴァッファ-ウィッテン理論 (C. Vafa, E. Witten) について見ていく．位相的場の理論自身，単に定式化を学ぶというためには，前章などで詳しく見た超対称理論という観点は必ずしも必要ない．その意味で前章を読み飛ばした人も，それに関連する事項を除いてこの章を読むことは可能だ．しかし，ウィッテン等が位相的場の理論に関して非自明な予想を与えていく思考の過程を理解するには，前章の超対称ゲージ理論および双対性の概念が必要がある．この章では特に断らない限り，向き付けられたコンパクトなリーマン多様上の場の理論を考える．

3.1 経路積分による位相的場の理論

リーマン多様体上の位相的場の理論を「観測量（分配関数，期待値）がリーマン計量に依存しない理論」と定義する．つまりこの章で扱う「位相的」とは「微分同相」についての対称性であることに注意されたし[1]．

---

[1]「位相的」とは通常，同相な多様体 M と M' に対して同じ値をとることを意味する形容詞である．同相とは，同相写像 $f : M \to M'$ が存在する，すなわち f と f^{-1} が連続であるとい

理論を構成する全ての場を ϕ_i と書くことにする．つまり M をコンパクトな向き付けられたリーマン多様体とし，あるファイバー束を $E_i \to M$ としたときのその切断を ϕ_i と書いている（文字 ϕ を使うがスカラー場を表すのではなく，任意の階数のテンソル場やスピノル場を表しているものとし，その識別添字として i を付けている）．したがって作用 S や観測量 O は ϕ_i の汎関数として与えられる．エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}(\phi_i)$ を

$$T_{\mu\nu}(\phi_i) = \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} S(\phi_i) \tag{3.1}$$

で定義する．実はこの定義で得られるエネルギー運動量テンソルは，前にネーターの定理のところ (1.5.1 節) でみた時空の並進対称性で得られるものと一致する．この理論（作用や測定可能量）に，ある無限小変換 δ で生成される対称性があるとする．つまり，

$$\delta S(\phi_i) = 0, \qquad \delta \mathcal{O}_\alpha(\phi_i) = 0 \tag{3.2}$$

である．ここで $\mathcal{O}_\alpha$ は観測可能な物理量を表すものとした．添字の α は観測可能な物理量が持つ時空の添字やゲージ対称性にともなう内部空間の添字などの添字全般を表す．位相的場の理論の定義を数式を用いて表そう．適当なテンソル $V_{\mu\nu}(\phi_i)$ を用いて

$$\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \mathcal{O}_\alpha(\phi_i) = 0, \qquad T_{\mu\nu}(\phi_i) = \delta V_{\mu\nu}(\phi_i) \tag{3.3}$$

と書ける場の理論を位相的場の理論と定義する．なぜなら，真空期待値を形式的にリーマン計量で変分すると

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \langle \mathcal{O}_\alpha \rangle &= -\int \mathcal{D}\phi_i \; \mathcal{O}_\alpha T_{\mu\nu} \exp(-S(\phi_i)) \\ &= -\int \mathcal{D}\phi_i \; \delta\Big(\mathcal{O}_\alpha V_{\mu\nu} \exp(-S(\phi_i))\Big) \\ &= -\int \mathcal{D}\phi'_i \; \Big(\mathcal{O}'_\alpha V'_{\mu\nu} \exp(-S'(\phi_i))\Big)\end{aligned}$$

うことだ.「微分同相」は，さらに f が可微分であるという条件をつける．

$$+\int \mathcal{D}\phi_i \left(\mathcal{O}_\alpha V_{\mu\nu} \exp(-S(\phi_i))\right)$$

$$=0 \tag{3.4}$$

となる．ここで δ で変換された量 $f(\phi_i)+\delta f(\phi_i)$ を $f'(\phi_i)$ とした (ϕ' も同様に $\phi+\delta\phi=\phi'$)．最後の等式は単に変数変換したもの同士の差なので 0 となった．積分速度 $D\phi$ が δ で不変であることも要請した．この式の主張は，分配関数や期待値が計量に非依存であるということだ．つまり「(微分）同相な変形のもとでの対称性」がある理論である．M の計量とは，感覚的な言葉に直すと M の形であるから，なめらかな形の変形によらない理論なわけである．その意味でトポロジカルな理論であり,「位相的（トポロジカル）場の理論」の定義として (3.3) はふさわしい．また，このように計量に非依存な量を本書では単に「位相不変量」と呼ぶ．

ただし，上の観測可能量に対する定義を $\dfrac{\delta\mathcal{O}_\alpha}{\delta g^{\mu\nu}}=0$ ではなく，

$$\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}\mathcal{O}_\alpha(\phi_i)=\delta O_\alpha^{\mu\nu}(\phi_i) \tag{3.5}$$

と拡張しても不変である．また，$\mathcal{O}_\alpha$ に δ-完全 (exact) の項を加えて $\mathcal{O}_\alpha+\delta\mathcal{O}_\beta$ としても期待値は変わらず，$\langle\mathcal{O}_\alpha\rangle=\langle\mathcal{O}_\alpha+\delta\mathcal{O}_\beta\rangle$ である．次に，位相的場の理論のヴァリエーションのうち，ウィッテン型またはコホモロジカル位相的場の理論と呼ばれるものについて特に詳細に見ていくことにする．

コホモロジカル（ウィッテン）型位相的場の理論

上の位相的場の理論の定義を満たすもので，特に作用 S がある変換 δ に関して完全 (exact) に書かれるものを考える．つまりある汎関数 $V(\phi_i)$ を用いて

$$S(\phi_i)=\delta V(\phi_i) \tag{3.6}$$

と書けるものを**コホモロジカル位相的場の理論** (cohomological field theory) またはウィッテン型位相的場の理論という．より一般には場 ϕ_i で表される位相不変量をさらに作用に加えてよい．作用がこのように書けることにより，作用のリーマン計量での変分で得られるエネルギー運動量テンソルも δ-完全 (exact) で得ら

れ，位相的場の理論になっている．コホモロジカルな場の理論の重要な性質であるオーバーオールファクターとしての結合定数非依存性を次に見る．

結合定数非依存

結合定数 g が作用の外にかかっている場合，

$$gS(\phi_i) \tag{3.7}$$

を考える．ゲージ理論の結合定数がその例である．このとき g の無限小変形を期待値に施すと

$$\frac{\delta}{\delta g}\langle\mathcal{O}\rangle = \int \mathcal{D}\phi_i\ \delta[\mathcal{O}V(\phi_i)\exp(-gS(\phi_i))] = 0$$

となる．最後の等式は計量の非依存性の証明同様に考える．したがって期待値を計算する際に，$g\to\infty$ などとしても結果は変わらない．この結果は非常に強力で，位相的場の理論の経路積分の大部分の計算を，停留点からの 2 次までの展開で計算できるということを意味する[2)]．exp の肩に $gS(\phi_i)$ が乗っているのであるから，極限で経路積分への寄与が停留点に集中するのはすぐ理解できるであろう．2 次までで展開された作用を経路積分するということは，その部分の積分は単にガウス積分で実行できるということだ．

以下の部分では δ として BRS オペレーター $\hat{\delta}$ を考える．つまり，理論の持っている対称性で，作用が $\hat{\delta}$-完全で書かれている，その δ が冪零

$$\hat{\delta}^2 = 0 \tag{3.8}$$

であるとする．ただし，ゲージ対称性のある理論ではゲージ同値なものは同一視して考えるので冪零もゲージ変換を除いて 0 の意味である．前に 1.6.5 節で見たようにゲージ対称性のフェルミオニックな大局的対称性への格上げとして BRS 変換は存在する．この場合もそうして定義されるのであるが，BRS 作用素 $\hat{\delta}$ の定義は当面とりあえずフェルミオニック（反可換）な冪零のオペレーターであるとだけ考えておいて支障は無い．

[2)] 摂動計算が 1 ループで十分という事実と，1.6.3 節から 1 ループで $\hbar^0$（$\hbar$ は今の議論では g に相等）であることを思い出せば，2 次までで十分であることが理解されるであろう．

3.2 マタイ-キレン形式

コホモロジカル位相的場の理論はいろいろな切り口で定式化できるが数学者にはマタイ-キレン形式 (V. Mathai, D. Quillen) から出発するのが理解しやすいだろう．ブラウ (N. Blau) の論文 [26] に従い，マタイ-キレン形式の無限次元への拡張がコホモロジカル位相的場の理論であることを見る．

この章で使われる記号をまとめておこう．$\{\phi_i\}$ を向き付き境界なしコンパクトリーマン多様体 M 上の場の組，$\mathcal{X}$ を ϕ_i で張られる汎関数空間，$\mathcal{G}$ をゲージ変換群，$s(\phi_i)$ をあるファイバー束の断面 (section) とする．詳しい内容は後で現れる．$s(\phi_i)=0$ を零点を求める方程式の組として，モジュライ空間を

$$\mathcal{M}=\{\phi_i\in\mathcal{X}|s(\phi_i)=0\}/\mathcal{G} \tag{3.9}$$

で表す．

3.2.1 有限次元の例

場の理論で構成する前に，有限次元の場合のマタイ-キレン形式を復習するのが有益であろう．$E\to M$ を $2m$ 次元ベクトル束とし，オイラー類を定義することから始めよう．

オイラー類

オイラー類 $e(E)\in H^{2m}(M)$ を接続 ∇ を用いて

$$e(\nabla,E)=(2\pi)^{-m}\mathrm{Pf}(\Omega_\nabla) \tag{3.10}$$

と定義することにする．$\mathrm{Pf}(\Omega_\nabla)$ は曲率 Ω_∇ のパフィアン（交代行列の場合なので単に行列式の平方根）である．行列式あるいはパフィアンはフェルミオンのガウス積分で書けるので

$$e(\nabla,E)=(2\pi)^{-m}\int d\chi \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\chi_a\Omega_\nabla^{ab}\chi_b} \tag{3.11}$$

とできる．ただしグラスマン奇なフェルミオン χ_a $(a=1,\cdots,2m)$ を用いた．つまりその積分は $\int d\chi_a\chi_b=\delta_{ab}$ であったことを思い出していただきたい．$\mathrm{rk}(E)=$

$2m=\dim(M)$ であるとすると，オイラー数は

$$\chi(\mathcal{E})=\int_M e(\nabla,E) \tag{3.12}$$

と書ける．ガウス分布でならしたオイラー類 (トム形式 (R. Thom) $\Phi_\nabla(E)$ のベクトル束の切断 s による引き戻し $e_s(\nabla,E)=s^*\Phi_\nabla(E)$) を次のように構成する．

$$e_s(\nabla,E)=\frac{1}{(2\pi)^m}\int d\chi e^{-\frac{1}{2}|s|^2+\frac{1}{2}\chi_a\Omega^{ab}\chi_b+i\nabla s^a\chi_a} \tag{3.13}$$

s^a は切断 s の添字をあらわに書いた各成分である．$s=0$ で，元の $e(\nabla,E)$ と一致している．微分形式の積分はその反可換性をグラスマン奇な量（つまりフェルミオン）で表すことで，いつもフェルミオンの積分とボゾン座標の積分を用いて以下のような書き換えをすることができる．

$$\int_M \frac{1}{n!}f_{\mu_1\ldots\mu_n}dx^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_n}=\int_M \frac{1}{n!}f_{\mu_1\ldots\mu_n}\psi^{\mu_1}\cdots\psi^{\mu_n}dx^n d\psi^n$$

ただし ψ をグラスマン奇のベクトルとし, $dx^n=dx^{\mu_1}\cdots dx^{\mu_n}$，$d\psi^n=d\psi^{\mu_1}\cdots d\psi^{\mu_n}$ とした．これを用いて

$$\int_M e_s(\nabla,E)=\int_M dx^{2m}d\psi^{2m}d\chi\frac{1}{(2\pi)^m}e^{-\frac{1}{2}|s|^2+\frac{1}{2}\chi_a\Omega^{ab}_{\mu\nu}\psi^\mu\psi^\nu\chi_b+i\nabla s^a(\psi)\chi_a} \tag{3.14}$$

と表される．ただし $s^a(\psi)$ は切断 s のなかの微分形式 dx^μ を ψ^μ で置き換えたものを表している．なぜこのような書き換えを行っているかというと,（量子力学の）経路積分と見直したいからである．上式を分配関数 $Z=\int\exp(-S)$ とみなすと作用 S が以下のように読みとれる．

$$S=\frac{1}{2}|s|^2-\frac{1}{2}\chi_a\Omega^{ab}_{\mu\nu}\psi^\mu\psi^\nu\chi_b-i\nabla s^a(\psi)\chi_a \tag{3.15}$$

作用を表す S とベクトル束の切断である s を混乱しないように注意されたし．また考えている系が有限次元であるから作用も点上で定義されていて，ラグランジアンの積分の形とは異なっている．さらに「経路積分」との類似で「作用」を読み出したが，有限次元なので「経路積分」とは今の場合は単なるリーマン多様体

上の積分であることも注意されたし．

無限次元の場の理論に拡張するときに通常の意味での「作用」なり「経路積分」と対応がつく．この作用 (3.15) は以下の変換のもと不変であるという対称性を持っている．

$$\hat{\delta}x^{\mu}=\psi^{\mu}, \quad \hat{\delta}\psi^{\mu}=0, \quad \hat{\delta}\chi_a=is_a \tag{3.16}$$

この変換は運動方程式を用いると冪零であり，単なる外微分とみなすことができる．運動方程式を使わずに（運動方程式を使わない場合を“オフシェル”と呼ぶ）冪零であることをあらわに見えるように補助場 H を導入して作用を以下のように書き直す．

$$S=\frac{1}{2}H^2-iH^a s_a-\frac{1}{2}\chi_a\Omega_{\mu\nu}^{ab}\psi^{\mu}\psi^{\nu}\chi_b,-i\nabla s^a(\psi)\chi_a \tag{3.17}$$

この作用のもと，対称性の変換則も以下のように書き換わる．

$$\hat{\delta}x_{\mu}=\psi_{\mu}, \quad \hat{\delta}\psi_{\mu}=0, \quad \hat{\delta}\chi_a=H_a, \quad \hat{\delta}H_a=0 \tag{3.18}$$

冪零でフェルミオニックな変換なので「BRS 変換」であると考えていい．しかも，作用は $\Psi=\left(\frac{1}{2}\chi_a(2s^a+A_{\mu}^{ab}\psi^{\mu}\chi_b+H^a)\right)$ というフェルミオニックな量（ゲージフェルミオンと呼ばれる）を用いて

$$\begin{aligned}S&=\hat{\delta}\Psi\\&=\hat{\delta}\left(\frac{1}{2}\chi_a(i2s^a+A_{\mu}^{ab}\psi^{\mu}\chi_b+H^a)\right)\end{aligned} \tag{3.19}$$

と BRS-完全 (exact) で書ける．ただし A_{μ}^{ab} はベクトル束の接続とした．作用が BRS-完全 (exact) で書けるというのがコホモロジカル位相的場の理論の定義であったから，結局**オイラー数はコホモロジカル位相的場の理論の分配関数で書ける**ことがわかった．

3.3　場の理論のマタイ-キレン形式

素朴に場の理論，つまり無限次元に拡張してみる．これはアティヤ (M. Atiyah) とジェフリー (L. Jeffrey) によって発見されたコホモロジカル位相的場の理論の

定式化の方法である．前節の理論の自然な拡張として以下の置き換えを考える．

$$x \longrightarrow \phi(x), \quad \psi \longrightarrow \psi(x), \quad \chi \longrightarrow \chi(x), \quad H \longrightarrow H(x) \tag{3.20}$$

$\phi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$, $H(x)$ のより明示的な表現は $\phi(x) = \phi(x)^{i;a_1,\cdots,a_l}_{\mu_1,\ldots,\mu_n}, \chi(x) = \chi(x)^{i;b_1,\cdots,b_k}_{\mu_1,\ldots,\mu_m}$ のように，どのようなファイバーの切断になっているか（局所回転変換に対してどのような表現をとっているか，およびその他のゲージ群等に対する表現や基底の種類）を識別するため，適当な添字 μ, i 等をもっているが，省略してある．したがってスカラー場ではないことに注意してほしい．

後の節で ϕ としてゲージ場の例を考える．また $\phi(x), H(x)$ はボゾニックな場で $\psi(x), \chi(x)$ はフェルミオニックな場である．前節のベクトル束の切断 $s(x)$ は汎関数 $s[\phi(x)]$ で置き換えられる．$s[\phi(x)]$ も明示的に表記するとファイバー束を識別する適当な添字を持っている．例えば後の節で s として，自己双対 2 形式の全体からなる無限次元ベクトル束の切断である自己双対曲率 $s^{\mu\nu}[A_\mu] = F^{+\mu\nu}$ の場合について構築する．BRS 変換 (3.18) は

$$\hat{\delta}\phi(x) = \psi(x), \quad \hat{\delta}\psi(x) = 0, \quad \hat{\delta}\chi(x) = H(x), \quad \hat{\delta}H(x) = 0 \tag{3.21}$$

と置き換わりこれが BRS 変換となる．BRS 変換はスカラーな生成子で定義されることから分かる通り，$\phi(x)$ と $\psi(x)$ など対応する場同士の局所回転群に対する変換性などは同じで，添字が揃っている．さらに，後で作用を見ると分かるが $s[\phi(x)]$ と $\chi(x)$ と $H(x)$ も同じ添字を持つ．つまり同じファイバーへの切断となっている．

ここでゴースト数という概念があったことを思い出しておこう (1.6.5 節参照)．つまり，BRS 変換生成子はゴースト数 1 を持っているとし，$\phi(x), H(x)$ のゴースト数はどちらも 0 で，$\psi(x), \chi(x)$ のゴースト数は 1 と -1 であるとすると，この重みで場を大局的スケール変換をしても作用は不変であるという対称性を持つ．

例として接続が 0 のときの作用は

$$\begin{aligned} S &= \int_M \hat{\delta}\Psi \\ &= \int_M \hat{\delta}\langle \chi \ ,(2i \ s[\phi(x)] + H(x))\rangle \\ &= \int_M \langle H(x) \ ,(2i \ s[\phi(x)] + H(x))\rangle - \left\langle \chi(x) \ ,\left(\left(2i\psi\frac{\delta}{\delta\phi}\right)s\right)\right\rangle \end{aligned} \tag{3.22}$$

と書ける．$\langle\,,\,\rangle$ は全ての i と μ の添字を縮約してスカラーにする内積を表す．ここで補助場 H をガウス積分で消去すると，$S=\int|s|^2+\cdots$ であり，作用の最低値を与える方程式として

$$s[\phi]=0$$

が得られる．通常 $s[\phi]=0$ で BPS 方程式が与えられるように s を選ぶ．

分配関数

とくに次の節で議論するゼロモードが無いとき，言いかえると BPS 方程式の解が孤立しているときについて考える．この条件を置く理由は次節でわかる．運動方程式あるいは BPS 方程式の解でもある $s[\phi_0]=0$ となる $\phi_0(x)$ を考える．s を $\phi_0(x)$ のまわりで展開すると，$\phi(x)=\phi_0(x)+\phi_q(x)$ として，

$$s[\phi]=\frac{\delta}{\delta\phi}s[\phi]\Big|_{\phi=\phi_0}\phi_q+O(\phi_q^2) \tag{3.23}$$

となる．$\phi_0(x)$ は期待値であり経路積分しない古典的な場で，$\phi_q(x)$ は量子的な場で経路積分しなくてはいけない場である．ここで期待値は結合定数によらないからガウス積分まで（経路積分する場は 2 次まで評価）で正しい値を計算できることを思い出そう．ガウス積分を実行すると，分配関数は（内積は添字の縮約で行われているとして省略して書く．添字自体も省略しているがスカラーではないことに注意せよ）

$$\begin{aligned}
Z&=\int\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\chi\mathcal{D}H\,e^{-gS}\\
&=\int\mathcal{D}\phi_q\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\chi\mathcal{D}H\exp\left\{-\left(\int_M H(x)\left(2i\frac{\delta}{\delta\phi}s\Big|_{\phi=\phi_0}\phi_q+H(x)\right)\right)\right\}\\
&\quad\times\exp\left\{-\left(\int_M -i\,\chi(x)\left(\left(\psi\frac{\delta}{\delta\phi}\right)s\right)\Big|_{\phi=\phi_0}\right)\right\}\\
&=\int\mathcal{D}\phi_q\ \ \exp\left\{-\left(\int_M\phi_q\left(\frac{\delta}{\delta\phi}s\right)^2\Big|_{\phi=\phi_0}\phi_q\right)\right\}\\
&\quad\times\int\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\chi\exp\left\{-i\left(\chi(x)\left(\left(\psi\frac{\delta}{\delta\phi}\right)s\right)\Big|_{\phi=\phi_0}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\det\left(\dfrac{\delta}{\delta\phi}s\right)}{\left|\det\left(\dfrac{\delta}{\delta\phi}s\right)\right|}\Bigg|_{\phi=\phi_0} = \pm 1 \tag{3.24}$$

となる．つまり BRS 対称性によりボゾニックな $\phi(x), H(x)$ とフェルミオニックな $\psi(x), \chi(x)$ が対称に作用に現れていて，ボゾンのガウス積分は分母，フェルミオンのガウス積分は分子に符号の違いを除いて同じ行列式を作り出す．そのため，その符号 $\pm$ だけが残るのである．もし摂動的にはつながらない真空（古典解 ϕ_0）がいくつもあり，それがある添字 k で分類されているならば，分配関数は，

$$Z = \sum_k \pm 1 \tag{3.25}$$

と符号についての足しあげとなる．

固定点定理

コホモロジカル位相的場の理論の一般的な性質として，BRS 変換の固定点だけが経路積分に寄与するということが示される [30].

簡単な証明をこころみてみよう．一般に群 F の対称性が存在する理論を考え，経路積分を実行する関数空間を $\mathcal{E}$ とする．F が $\mathcal{E}$ に自由に作用しているとすると，$\mathcal{E} \to \mathcal{E}/F$ というファイバー束が存在し，ファイバー方向の積分を先に実行すると，不変な作用 S とオブザーバブル O に対して

$$\int_{\mathcal{E}} e^{-S} O = (vol.F) \int_{\mathcal{E}/F} e^{-S} O \tag{3.26}$$

が成立する．

今，BRS 対称性が生成する対称性が F である場合を考える．(1.168) で見たようにフェルミオニックな座標 θ に対して $\int d\theta 1 = 0$ であるから，フェルミオニックな対称性の場合は体積 $(vol.F)$ は 0 である．別の言い方をすると，自由に生成されるならば BRS 対称性に対する座標を θ を導入できる．BRS 不変な作用やオブザーバブル $\hat{\delta}S = \hat{\delta}O = 0$ の意味することは，S と O が θ に依存しないということであるから，θ 積分で 0 ということである．したがって自由に作用する部分の経路積分への寄与が 0 となる．つまり経路積分の評価は，BRS 変換の固定点

とその近傍のみ評価すれば十分である．

3.3.1　フェルミオニックゼロモード

フェルミオンのゼロモードと接空間の関係をこの節で見てみよう．

観測可能量 O の真空期待値は

$$\langle O\rangle = \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\chi\, O\, e^{-gS} \tag{3.27}$$

であるがこれは結合定数によらなかった．つまり

$$\frac{\delta}{\delta g}\langle O\rangle = \langle\hat{\delta}(O\Psi)\rangle = 0 \tag{3.28}$$

である．したがって極限 $g\to\infty$ で考察してもよい．古典解 ϕ_0 とそのまわりの 2 次までの摂動でとらえるということだ．

$$\phi_0 \in \{s^{-1}(0)\} = \{\phi_0 | s[\phi_0]=0\} \equiv \mathcal{A} \tag{3.29}$$

作用 (3.22) の χ の変分で ψ の運動方程式が出てくるが，その解（ゼロモード）の集合は

$$\psi_0 \in \left\{ \psi_0 \;\middle|\; \left(\psi_0 \frac{\delta s[\phi]}{\delta\phi}\right) = 0 \right\} \tag{3.30}$$

である．この運動方程式は (3.29) の方程式に変分を施して得られるものと一致しているから，ψ_0 は $\{s^{-1}(0)\}$ の空間の接ベクトルである．

もしこの方程式を満たす 0 でない ψ の解（ゼロモード）があると分配関数 $\langle 1\rangle$ が 0 になるという場合がある．その理由を物理的な言い方をすると，ゴースト数保存を量子論的に破ること，つまりゴースト数アノマリーが存在するために 0 になる．このことは，別の言い方をすると次のような理由からもわかる．フェルミオンの積分は微分と同じで $\int d\psi_i\psi_j = \delta_{ij}$ であった．ゼロモードは汎関数積分測度には含まれるが，ゼロモードの存在はそのフェルミオンに関する作用が 0 になることを意味している．つまりゼロモードでの経路積分の被積分項が $\exp 0 = 1$ であり，定数の微分と同じで自明に 0 となってしまう．

この場合には 0 でない値を得るには，ゴースト数（ゼロモードの数）をかせぐ

位相的対称性を壊さない観測可能量 $O[\phi,\psi]$ を導入しなくてはいけない（分配関数は観測量として 1 であるからゴースト数は 0 である）．O の真空期待値は

$$\langle O\rangle = \int \mathcal{D}\phi_0\mathcal{D}\psi_0 O[\phi_0,\psi_0]\int \mathcal{D}\phi'\mathcal{D}\psi'\mathcal{D}\chi\mathcal{D}b\, e^{-gS} \tag{3.31}$$

と書くことができる．ここで ϕ' と ψ' はゼロモードではない場を表している．ゼロモード積分が 0 にならないように観測量の中に含まれるフェルミオンの積分で補っていると思っていい．

BRS 対称性（$\hat{\delta}$ 対称性）から，分配関数のときのように $\int \mathcal{D}\phi'\mathcal{D}\psi'\mathcal{D}\chi\mathcal{D}b\, e^{-gS}$ は ±1 である．符号 ± のいずれになるかは，各々の ϕ_0 ごとに決まる．観測量の中に含まれるフェルミオンのゼロモードをあらわにするよう，フェルミオンを別にして $O[\phi,\psi]=O(\phi)^{1\ldots\dim\mathcal{A}}\psi_1\ldots\psi_{\dim\mathcal{A}}$ と書くことにする ($\dim\mathcal{A}$ は後で議論する．$\mathcal{A}$ は $s[\phi]=0$ の解の集合であった）．接ベクトル $\delta\phi$ の満たす式は $s[\phi]=0$ の変分をとると

$$\delta s(\phi) = \left(\delta\phi\frac{\delta}{\delta\phi}\right)s[\phi]=0 \tag{3.32}$$

であり，フェルミオンの ψ のゼロモードと一致していた．ψ_0 が接空間をはるのである．上式 (3.31) は解空間の積分だけで

$$\begin{aligned}\langle O\rangle &= \int \mathcal{D}\phi_0\mathcal{D}\psi_0 O[\phi_0,\psi_0](\pm 1)\\ &= \pm\int_{\mathcal{A}} d\phi_1\wedge\ldots\wedge d\phi_{\dim\mathcal{A}} O(\phi)^{1\ldots\dim\mathcal{A}}\end{aligned} \tag{3.33}$$

となっている．ϕ と ψ の次元が一致しているのは，解の空間と解の接空間の次元すなわちゼロモード $\{\psi_0\}$ の次元が一致しているからである．前の節で見たように ψ は微分形式 $d\phi$ の反交換性をになうものとして，解空間の微分形式で表した．

解空間 $\mathcal{A}$ の次元について今一度強調しておくと

$$\sharp(\psi_0) = \dim\mathcal{A} \tag{3.34}$$

つまり，**フェルミオンのゼロモードの数と解空間の次元が等しい．**

3.4 トポロジカルゲージ理論

今までの議論は局所的な対称性がない場合であった．ゲージ対称性があるときはどのように変更されるであろう？　この節ではこのことについて考えてみる．

ゲージ群を G, 場のゲージ変換群を $\mathcal{G}$, $\mathcal{A}=\{s^{-1}(0)\}$ をゲージ変換群で割ったモジュライ空間を $\mathcal{M}\equiv\mathcal{A}/\mathcal{G}$ とする．BRS 変換 $\hat{\delta}$ を以下のように変更する．

$$\hat{\delta}\phi(x)=\psi(x),\quad \hat{\delta}\psi(x)=\delta_g\phi(x),\quad \hat{\delta}\chi=H,\quad \hat{\delta}H=\delta_g\chi \tag{3.35}$$

ただし δ_g は無限小ゲージ変換作用素を表すとする．ϕ,ψ,χ,H のゴースト数は 0,1,−1,0 であり，したがって δ_g のゴースト数は 2 でなくてはならない．つまり，δ_g に用いられるゲージパラメータの働きをする場のゴースト数は 2 である．またそのゴースト数 2 のゲージパラメータ場の BRS 変換は 0 であるとする．ゲージ対称性が無いときは BRS 作用素は冪零であったが，ゲージ対称性がある場合は (3.35) のように

$$\hat{\delta}^2=\delta_g$$

と変更され，冪零はゲージ変換の同値関係で割ったときに成立する．

位相的ヤン-ミルズ理論の例だと

$$\hat{\delta}A_\mu=\psi_\mu,\qquad \hat{\delta}\psi_\mu=\delta_g A_\mu=D_\mu\phi,\qquad \hat{\delta}\phi=0 \tag{3.36}$$

と BRS 対称性が定義される（ここではヒッグス粒子 ϕ がゲージパラメータ場を表している．一般論の任意のボゾン場を表す場 ϕ と間違わないように注意しなくてはいけない．一般論の ϕ に対応しているのはゲージ場 A_μ である）．

また，この変形された BRS 変換は，無限次元の同変微分と解釈される．変形前の BRS 変換は有限次元では外微分で，$\hat{\delta}x^\mu=\psi^\mu, \hat{\delta}\psi^\mu=0$ は，$\psi^\mu=dx^\mu, \hat{\delta}=d$ であることはすでに述べた．変形後の BRS 変換を群作用の定義された多様体上で有限次元的に書くと，$\hat{\delta}x^\mu=\psi^\mu=dx^\mu$ は変わらないが，$\hat{\delta}\psi^\mu=\mathcal{L}_x\cdot x^\mu$ と群作用の無限小変換（リー微分）$\mathcal{L}_x$ があらわれる．このことから，

$$\begin{aligned} &d-i_x \Longleftrightarrow \hat{\delta} \\ &(d-i_x)^2=-(di_x+i_xd)=-\mathcal{L}_x \Longleftrightarrow \hat{\delta}^2=\delta_g \end{aligned} \tag{3.37}$$

と，BRS 作用素と同変微分が対応することがわかる．これは 5 章でも用いられる重要な性質なので要注意．

BRS 作用素のこの変形があっても，ゲージ不変な観測量や理論を考えている限り，冪零のよい性質は変わらないことに注意されたし．

ゲージ対称性が無い場合は，観測量の期待値が $\mathcal{A}$ 上の積分として記述されることを見た．今はゲージ対称性があるので $\mathcal{M}\equiv\mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上の積分を得る必要がある．そのためには純ゲージの空間のポアンカレ双対が見つかるといい

$$\int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} O(\phi,d\phi)=\int_{\mathcal{A}} O(\phi,d\phi)\exp\{-\int\hat{\delta}\Psi_{\mathrm{proj}}\}. \tag{3.38}$$

$\exp\{-\int\hat{\delta}\Psi_{\mathrm{proj}}\}$ **は $\mathcal{A}$ をゲージ水平方向への射影**する働きをするものとして導入した．指数の形で記述する理由は，物理理論の体裁をしていないと場の理論のテクニックを用いることができないためである．作用に新たに $\int\hat{\delta}\Psi_{\mathrm{proj}}$ が付け加えられたと考えることで通常の場の理論の体裁を保つことができるのだ．したがってまずはそれを見つけて，$\hat{\delta}\Psi_{\mathrm{proj}}$ **も作用に付け加え**，新しい作用

$$S=\int_M(\hat{\delta}\Psi+\hat{\delta}\Psi_{\mathrm{proj}}) \tag{3.39}$$

をゲージ対称性を持つコホモロジカル位相的場の理論の作用とするといい．そのことで観測量の期待値もモジュライ空間上の積分として得られるようになる．

Ψ_{proj} を得るための C と $C^\dagger$ を導入する．簡単のため，有限次元の場合で言うと，ベース多様体としてリーマン多様体 M とし，その上の主束 P を考え各点 p 上で群 G の作用が考えられているわけだが，C を点 p 上の群作用の微分 C: $\mathfrak{g}\to T_pP$ として定義する．ただし $\mathfrak{g}$ は G のリー代数とする．θ をゲージパラメータとして

$$\delta_g\phi=C\theta \tag{3.40}$$

と書くことができる．記号の節約でゲージパラメータ θ のゲージ変換も δ_g と書いた．以下では M のかわりに $\mathcal{A}$, G のかわりに $\mathcal{G}$ と無限次元として適用する．

位相的ヤン-ミルズ理論の例では，ゲージ場 A に対して（ここでも，一般論でゲージパラメータ θ が，ヤン-ミルズ理論ではヒッグス場 $\phi(x)$ で書かれることに

注意する必要がある．もちろん一般論の場 $\phi(x)$ に対応するのはヤン-ミルズ理論ではゲージ場 A でありヒッグス場 ϕ でないことも注意してほしい），

$$\delta_g A^a_\mu = D_\mu\phi = C\phi \tag{3.41}$$

である．$C^\dagger$ を C の随伴演算子で定義する．例えばヤン-ミルズ理論の例ではゲージ不変なスカラー積 $\langle\,,\rangle$ を用い，$C^\dagger$ を

$$\langle\psi_\mu, D_\mu\phi\rangle = \langle C^\dagger\psi_\mu, \phi\rangle = \langle D^\mu\psi_\mu, \phi\rangle \tag{3.42}$$

とできる．ゲージ不変なスカラー積 $\langle\,,\rangle$ は，リーマン計量によるスカラー積とゲージ群の表現に対してキリング形式をとっていると思えばいい（ゲージ群としてはコンパクト群を考える）．

一般論に話を戻す．$C^\dagger$ **のカーネルはゲージ変換と直交する水平方向であることに注意**しよう．実際

$$C^\dagger\psi = 0 \Longrightarrow 0 = \langle C^\dagger\psi, \theta\rangle = \langle\psi, C\theta\rangle = \langle\psi, \delta_g\phi\rangle$$

となる．この性質から Ψ_{proj} を作ることができる．経路積分を $C^\dagger$ のカーネルに制限するものが欲しいプロジェクションである．Ψ_{proj} を実現するために η（反ゴースト）と補助場 $\bar{\phi}$ を導入する．η（反ゴースト）のゴースト数は -1 で補助場 $\bar{\phi}$ のゴースト数は -2 である．それらの BRS 変換則は

$$\hat{\delta}\bar{\phi} = \eta, \qquad \hat{\delta}\eta = \delta_g\bar{\phi} \tag{3.43}$$

で定義する．ここでの δ_g はゴースト数 2 をもつ (3.35) と同じものである．これらの場を使い，Ψ_{proj} は

$$\Psi_{\mathrm{proj}} = \langle C^\dagger\psi, \bar{\phi}\rangle \tag{3.44}$$

と置く．付け加えられる作用は

$$\hat{\delta}\Psi_{\mathrm{proj}} = \langle\hat{\delta}(C^\dagger\psi), \bar{\phi}\rangle - \langle C^\dagger\psi, \eta\rangle \tag{3.45}$$

である．この付け加えられた作用がゲージ水平方向への射影の働きをすることを確認しよう．η の変分で得られる運動方程式は

$$C^\dagger\psi = 0 \tag{3.46}$$

である．別の言い方をすると，η で経路積分するとデルタ関数としてこの条件が現れる．$C^\dagger$ のカーネルは水平方向であったので経路積分がゲージ水平方向に制限されることが確認された．

この結果，**真空期待値はモジュライ空間 $\mathcal{M}$ での積分**で与えられ，

$$\langle O\rangle = \pm\int_{\mathcal{M}} d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_{\dim\mathcal{A}} O(\phi)^{1\ldots\dim\mathcal{A}} \tag{3.47}$$

となる[3)]．これはゲージ固定ではないことに注意しなくてはいけない．加えたものはゲージ不変である．したがって，ゲージ群 $\mathcal{G}$ に対するゲージ固定は通常どおり行う必要がある．

$\bar{\phi}$ の変分で得られる運動方程式に関してもコメントしておこう．ベースとして解空間 $\mathcal{A}=\{s^{-1}(0)\}$, ファイバーとして切断 s を持つものとする自明なベクトル束から出発する．次にそれを $\mathcal{G}$ で割ったときにできる，主束 $\mathcal{A}\to\mathcal{M}$ に伴われた，非自明なベクトル束を考える．ゲージ変換 $\phi\to C\theta$ であることからモジュライ空間の接ベクトルは次のように垂直部分と水平部分に分けることができる．

$$\psi = C\frac{1}{C^\dagger C}C^\dagger\psi + \left(1 - C\frac{1}{C^\dagger C}C^\dagger\right)\psi \tag{3.48}$$

つまり $C\dfrac{1}{C^\dagger C}C^\dagger$ を接続とみなすことができる．このことを用いると $\bar{\phi}$ の変分で得られる方程式 $\hat{\delta}(C^\dagger\psi)=0$ から θ が水平部分の曲率 2 形式

$$\theta = \frac{1}{C^\dagger C}\left(\psi\frac{\delta}{\delta\phi}(C^\dagger\psi)\right) \tag{3.49}$$

であることがわかる．

少しテクニカルな議論のため，ここで少し補足する必要があるだろう．簡単のため有限次元の言葉を用いて説明する．ただし微分幾何的な議論を必要としない読者は読みとばしてもかまわない．主束の接続を定義する際に，水平部分への射影と垂直部分への射影を用いて幾何学的に定義されていたことを思い出し

---

3) モジュライ空間のある積分で与えられることは了解されるが，もともと通常の場の理論の経路積分測度であったとゼロモードの積分測度を定義したときには，モジュライ空間のどのような積分測度になっているかの対応は不明瞭であろう．そういったモデルでは，モジュライ空間の積分測度は各モデルで考察する必要がある．例えば 5 章の中でこの問題を再び考察する．

てほしい（[1] 等を参照せよ）．射影演算子 $C(C^\dagger C)^{-1}C^\dagger$ とするときに接続は $(C^\dagger C)^{-1}C^\dagger$ で定義できる．ここで C が接ベクトルへの写像であるのに対し $C^\dagger$ が 1 形式である．ω を接続とし，X,Y として水平方向を向いた接ベクトルを考えたとする．曲率が $d\omega+\omega\wedge\omega$ であるとすると X,Y が水平方向であることから $\omega(X)=\omega(Y)=0$ であるので曲率の水平部分は

$$(d\omega+\omega\wedge\omega)(X,Y)=d\omega(X,Y)=-\omega([X,Y]_L)=\frac{-1}{(C^\dagger C)}C^\dagger([X,Y]_L)$$

3 番目の等式のところで，ベクトル場 X,Y に対するリー微分を $\mathcal{L}_X Y=[X,Y]_L$ で書くことにすると，一般に 1 形式 ω に対して

$$d\omega(X,Y)=X(\omega(Y))-Y(\omega(X))-\omega([X,Y]_L)$$

であるという事実を用いた．

またこの公式をもう一度用いることで水平部分の曲率は

$$\frac{-1}{(C^\dagger C)}dC^\dagger(X,Y)$$

と書くことができる．

無限次元のゲージ理論でも同様である．例えば次節で扱う位相的ヤン-ミルズ理論の場合は以下のように考える．自明なベクトル束として $\mathcal{A}\times\Omega^{2,+}(M)$ を考える．つまり切断として自己双対なゲージ曲率 2 形式 F^+ を持つようなベクトル束である．これから，自明ではないベクトル束 $\mathcal{A}\times_{\mathcal{G}}\Omega^{2,+}(M)$ をつくる．$C(\phi)=D_\mu\phi$, $C^\dagger\psi_\mu=D^\mu\psi_\mu$ であった．$\hat{\delta}\sim d+i_\phi$ と同変微分で解釈した際に，

$$\hat{\delta}=\psi_\mu\frac{\delta}{\delta A_\mu}+\cdots+D_\mu\phi\frac{\delta}{\delta\psi_\mu}+\cdots$$

より A_μ に対する d と，ψ_μ に対して i_ϕ が，それぞれ

$$\psi_\mu\frac{\delta}{\delta A_\mu},\qquad D_\mu\phi\frac{\delta}{\delta\psi_\mu}$$

であることから，$dD^\mu\psi_\mu=i[\psi^\mu,\psi_\mu]$ である（ここでの d は $\psi_\mu\frac{\delta}{\delta A_\mu}$ を表している）．したがって，一般論でも曲率の水平部分が上のように (3.49) で与えられて

いる．実際に次節の位相的ヤン-ミルズ理論の場合で見てみると，$\bar{\phi}$ の変分で得られる方程式は

$$\hat{\delta}(C^\dagger\psi_\mu)=\hat{\delta}(D^\mu\psi_\mu)=i[\psi^\mu,\psi_\mu]+iD^\mu D_\mu\phi=0$$

である．ここでももう一度注意するが，一般論の θ に対応しているのはヒッグス場 ϕ である．したがって運動方程式の解が

$$\phi=-\frac{1}{D^\mu D_\mu}[\psi^\mu,\psi_\mu] \tag{3.50}$$

と表され，$C^\dagger C=D^\mu D_\mu$ であることから，ヒッグス場 ϕ が水平部分の曲率に対応付けられることがわかる．

3.5 ドナルドソン-ウィッテン理論

前節で見たゲージ対称性のあるコホモロジカル位相的場の理論の例として，ドナルドソン理論の経路積分を用いた定式化を行う．前節の一般論で，一般のボゾンの場として ϕ を用い切断 $s[\phi]$ としていたが，ドナルドソン理論ではボゾンの場としてゲージ場 A_μ を考え，切断として自己双対曲率 $F^+_{\mu\nu}$ を考えることに対応する．ここで定式化されるドナルドソン不変量は，4 次元多様体の位相不変量で，これを計算することで微分同相でない多様体の判定が行われた．本書では具体的には触れないので，詳細は [23] などを参照せよ．

向き付けられた 4 次元コンパクトリーマン多様体 M をベースとする主束を P とし，P 上 G 接続の空間を $\mathcal{A}$ とする．リー環を $\mathfrak{g}$ で書き，G が随伴表現で作用している．$\mathfrak{g}$ がファイバーで P に同伴するベクトル束 $\mathrm{ad}P$ を $\mathrm{ad}P:=P\times\mathfrak{g}/G$ で定義する．自己双対 2 形式を $\Omega^{2,+}(M,\mathrm{ad}P)$, 反自己双対曲率の空間を $\mathcal{F}$ とする．$\mathcal{G}$ でゲージ変換群を表すとする．ベクトル束 $\mathcal{E}_+=\mathcal{A}\times_{\mathcal{G}}\Omega^{2,+}(M,\mathrm{ad}P)$ への切断 $s:\mathcal{A}/\mathcal{G}\to\mathcal{E}_+$ を考え，それに対するマタイ-キレン形式でコホモロジカルな位相的場の理論を構成する．切断 $s[\phi]$ として

$$s[A]=F^+(A) \tag{3.51}$$

を選ぶ．添字をつけて成分であらわすと，$s_{\mu\nu}[A]=F^+_{\mu\nu}$ である．そのように構成

したコホモロジカルな位相的場の理論は，ゼロ $\{A|s[A]=0\}/\mathcal{G}$ すなわちインスタントンのモジュライ空間 $\mathcal{M}_k$ 上のあるベクトル束で定義されたオイラー数を与える（インスタントンについては，非可換空間上のインスタントンの説明で詳しく触れるので，不慣れな読者は 4.3 節を参照してからこの節を読んだ方がよいかもしれない）．構成要素となる場は，

$$\begin{aligned}&\chi_{\mu\nu}, H_{\mu\nu} \in \Omega^{2,+}(M,\mathrm{ad}P), \qquad \psi_\mu \in \Omega^1(M,\mathrm{ad}P),\\ &\eta, \bar{\phi}, \phi \in \Omega^0(M,\mathrm{ad}P)\end{aligned} \tag{3.52}$$

である．ただし，前節では主要に扱う場を ϕ で表していたのでゲージパラメータ場として θ を用いたが，この節では通常の超対称ゲージ理論の慣例にしたがって θ ではなく ϕ を用いることにする．つまりヒッグス粒子の ϕ が前節のゲージパラメータ場として用いられるのである．ゴースト数は $(A_\mu$, $\chi_{\mu\nu}$, $H_{\mu\nu}$, ψ_μ, η, $\bar{\phi}$, $\phi)$ に対して (0, -1, 0, 1, -1, -2, 2) が付与される．BRS 変換（ゴースト数を 1 ふやす）の定義として一般論同様に

$$\begin{array}{lll}\hat{\delta}A_\mu=\psi_\mu, & \hat{\delta}\psi_\mu=D_\mu\phi, & \hat{\delta}\phi=0\\ \hat{\delta}\chi_{\mu\nu}=H_{\mu\nu}, & \hat{\delta}H_{\mu\nu}=-i[\chi_{\mu\nu},\phi] & \\ \hat{\delta}\bar{\phi}=\eta, & \hat{\delta}\eta=-i[\bar{\phi},\phi] & \end{array} \tag{3.53}$$

で与える[4)]．作用を与えるゲージフェルミオン Ψ と Ψ_{proj} も前節の一般論より

$$\begin{aligned}\Psi&=\int_X d^4x\sqrt{g}\,\mathrm{tr}\left[2\chi_{\mu\nu}(\frac{1}{2}H^{\mu\nu}-iF^{+\mu\nu})\right]\\ \Psi_{\mathrm{proj}}&=\int_X d^4x\sqrt{g}\,\mathrm{tr}[\bar{\phi}D_\mu\psi^\mu]\end{aligned} \tag{3.54}$$

と選べばよい．コホモロジカルヤン-ミルズ理論の作用は BRS-完全 (exact) なものとしてトポロジカルな項 $k=\dfrac{1}{8\pi^2}\displaystyle\int \mathrm{tr}F\wedge F$ を用いて

[4)] 1 章で登場した例 1.11 で指摘したように，ここで行われている作用の構成は BRS 量子化によるゲージ固定に他ならない．

$$
\begin{aligned}
S &= \int_M d^4x \hat{\delta}(\Psi + \Psi_{\text{proj}}) + k \qquad (3.55)\\
&= \int_M d^4x \sqrt{g} \mathrm{tr}\Big(F^{+2} - 4i\chi^{\mu\nu} D_\mu \psi_\nu + i\eta D_\mu \psi^\mu + i\phi[\chi_{\mu\nu}, \chi^{\mu\nu}] \\
&\quad - \bar{\phi}[\psi_\mu, \psi^\mu] - \bar{\phi} D_\mu D^\mu \phi\Big) + k
\end{aligned}
$$

と与えられる（フェルミオン同士の交換関係は反交換関係すなわち $[\chi_{\mu\nu}, \chi^{\mu\nu}] = \{\chi_{\mu\nu}, \chi^{\mu\nu}\} = \chi_{\mu\nu}\chi^{\mu\nu} + \chi^{\mu\nu}\chi_{\mu\nu}$ であるとしている）．ただし補助場 $H_{\mu\nu}$ は，この作用が exp の肩に乗って全ての場で経路積分されている状況のもとではガウス積分をすることで消去できるのでそうした ($H_{\mu\nu}$ の変分で得られる運動方程式で消去してもいい)．

ψ_μ のゼロモードは，$\chi^{\mu\nu}$ と η の運動方程式

$$
(D_\mu \psi_\nu)^+ = 0, \qquad D_\mu \psi^\mu = 0 \qquad (3.56)
$$

で与えられる．$(D_\mu \psi_\nu)^+$ の $+$ は，μ, ν の添字に対する自己双対を表している．ゼロモードの数はモジュライ空間の次元で与えられることを思い出してほしい．$SU(2)$ ゲージ群の場合，インスタントン数 k とベース多様体 M のオイラー数 χ と符号数 σ を使い

$$
\dim \mathcal{M}_k = 8k - \frac{3}{2}(\chi + \sigma) \qquad (3.57)
$$

で次元が計算される事実がある．前節で見たように，この次元に応じて観測量 O を入れないと，ゴースト数アノマリー（またはフェルミオンのゼロモード積分）のため零でない量を得ることができない．したがって次にそのような観測量について考えてみる．

オブザーバブルとドナルドソン不変量

オブザーバブル（観測量）は BRS 不変すなわち，$\hat{\delta} O = 0$ を満たすものとして定義される．またその期待値は $\langle O \rangle = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\bar{\phi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\chi\mathcal{D}\eta \; O \exp(-S)$ であった．BRS 不変で BRS-完全 (exact) でないもの，つまり BRS コホモロジーは限られていて，今の場合は以下に作られるもので尽きている[5)]．2-次元ホモロジー

5) M が単連結であることを仮定している．より一般には 2-ホモロジー以外に対応する部分が

クラス $\Sigma\in H_2(M;\mathbb{Z})$ とポアンカレ双対 $v\in H^2(M;\mathbb{Z})$ に対して次に与えるものは，ゴースト数 2 のオブザーバブルになっている．

$$\hat{v}=\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Sigma}\mathrm{tr}(i\phi F+\frac{1}{2}\psi\wedge\psi) \tag{3.58}$$

$\hat{\delta}(i\phi F+\frac{1}{2}\psi\wedge\psi)$ が全微分であることから，$\hat{\delta}$ コホモロジーは Σ **のホモロジーにのみ依存**する観測量である．また全微分の積分であることから $\hat{\delta}\hat{v}=0$ の条件を満たしていることもわかる．ゴースト数が ϕ が 2, A が 0, ψ が 1 であったことから，$\hat{v}$ のゴースト数が 2 であるので，ゴースト数のアノマリーの分を稼いでゼロでないトポロジカルな期待値を得ることができる．言い換えると，フェルミオンゼロモードによる経路積分（すなわち微分）を $\exp(-S)$ だけに実行すると 0 になるところを，オブザーバブルに演算することでゼロでない値を得ている．さらに**ゴースト数 4** の $H_0(M;\mathbb{Z})$ のみに依存する次のような観測量を作ることもできる．

$$\hat{u}=-\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{tr}\phi^2 \tag{3.59}$$

これがオブザーバブルであるのは $\hat{\delta}\phi=0$ から明らかであろう．オブザーバブルは本質的に $\hat{v},\hat{u}$ の組み合わせで尽くされている．インスタントンモジュライ空間の次元（すなわちゼロモードの数）とオブザーバブルのゴースト数が一致するような組み合わせをとって期待値を計算すればいい．そうした組み合わせを表記するには，生成関数として $\exp(\hat{v}+\tau\hat{u})$ のような量を導入するのが便利であろう[6)]．

これらの観測量を用いると，結局ドナルドソン不変量は観測量 $\hat{v},\hat{u}$ の期待値として定義される．$\langle O\rangle$ が表す経路積分が，ガウス積分で評価する期待値を表すものと考えると，場の停留点，すなわち真空の一つを選びその真空での期待値を評価したことに過ぎない．経路積分を定義している関数空間の中には，非摂動的に離れている別の真空とその周りの関数も含まれている．したがってそうした非摂動的な効果である異なる真空についてもオブザーバブルの期待値を足しあげな

存在する．

6) 生成関数となるためには $\hat{v}$ に関しては，$H_2(M;\mathbb{Z})$ の基底 $\Sigma_1,\cdots\Sigma_{b2}$ を用意し，その和で表す必要がある．

くてはいけない．今考えているヤン-ミルズ理論の真空はもちろんインスタントンである．つまり真空はインスタントン数 k で分類されるから，観測量の期待値はインスタントン数の足しあげで書かれ

$$\langle \exp(\hat{v}+\tau\hat{u})\rangle = \sum_k \int_{\mathcal{M}_k} \exp(\hat{v}+\tau\hat{u}) \tag{3.60}$$

となる．等号は 3.4 節で見たように経路積分がモジュライ空間上の積分に書き換わることを用いた．これがドナルドソン不変量の経路積分による構成である．

こうして，ドナルドソン不変量が経路積分形式の位相的場の量子論の観測量の期待値として定式化されだが，これだけではドナルドソンによる定式化を書き直しただけである．しかし次節で述べるようにこれを $\mathcal{N}=2$ 超対称性理論と読み直すことで，前章でみたサイバーグ-ウィッテン理論とのつながりが見えてくる．

3.5.1 $\mathcal{N}=2$ のツイスト

前節ではマタイ-キレン形式としての位相的ヤン-ミルズ理論を見てきた．しかし歴史的には $\mathcal{N}=2$ 超対称性のツイストとして位相的ヤン-ミルズ理論が発見された（ツイストに関しては以下で説明）．それを見ることで，ドナルドソン不変量がサイバーグ-ウィッテン不変量で書けるという予想が生じたことの根拠を観察する準備をしよう．

$\mathcal{N}=2$ 超対称ヤン-ミルズ理論を出発点とする．$\mathcal{N}=2$ 超対称を持つ理論はツイストと呼ばれる操作をして位相的場の理論になる．空間の回転対称性 $SO(4)$ は局所的に $SU(2)_L \times SU(2)_R$ とも書ける．つまり $SO(4)$ でのベクトルの変換を $SU(2)$ で変換されるスピノルの変換の組み合わせで書くことができ，もともと 2 成分スピノルであれば $SU(2)_L$ または $SU(2)_R$ の変換で空間回転を受けるものと考えることができる．

またその回転とは別に $\mathcal{N}=2$ の超対称の 2 種類の超空間に起因する回転対称性 $SU(2)_I$ も存在している．これを R-対称性と呼んでいた（超対称性の箇所や 2 章などを参照）．つまり，例えば超対称性を生成している生成子 $Q_{\alpha i}, \bar{Q}_{\dot{\alpha} i}$ に $i=1,2$ の添字があり，それをミックスする回転対称性として $SU(2)_I$ があるのだ．あるいは超場を作るときに現れた超空間の座標 θ_i の回転対称性 $(\theta_i \to G_i{}^j\theta_j$, $G \in SU(2)_I)$ として $SU(2)_I$ があるといってもよい．

$$H=SU(2)_L\times SU(2)_R\times SU(2)_I \tag{3.61}$$

という対称性を $\mathcal{N}=2$ 超対称ヤン-ミルズ理論は持っているわけである．超対称変換のベクトル多重項は

$$\begin{array}{ccc} & A_\mu & \\ \psi^1 & & \psi^2 \\ & \phi & \end{array} \tag{3.62}$$

であった．ψ^1, ψ^2 はワイルスピノルとする．これと共役な場も導入し $\bar{\phi},\bar{\psi}^1,\bar{\psi}^2$ とする（前章までのノーテーションだと ψ^1 を λ と書いてきたが，ツイスト後のノーテーションとのつながりを重視して ψ^i を使うことにした）．H の量子数(変換するときの重み）は

$$\begin{aligned} &\psi^1=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right), \quad \psi^2=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right), \quad \phi=(0,0,0) \\ &\bar{\psi}^1=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \quad \bar{\psi}^2=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \quad \bar{\phi}=(0,0,0) \end{aligned} \tag{3.63}$$

である．古典作用は 1 章で出てきた (1.210) の補助場 D と f をガウス積分で消去すると，

$$\begin{aligned} L=&-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F_a^{\mu\nu}-i\bar{\psi}^a_{\dot{\alpha}i}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}D_\mu\psi_{\alpha a}{}^i-D_\mu\bar{\phi}^aD^\mu\phi_a \\ &-\frac{i}{\sqrt{2}}\psi^{\alpha ia}[\bar{\phi},\psi_{\alpha i}]_a-\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}{}^{ia}[\phi,\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}{}_i]_a-\frac{1}{2}[\bar{\phi},\phi]^2 \end{aligned} \tag{3.64}$$

であった．超対称変換をあらわに書くと，超対称変換のスピノルパラメータ ξ を用いて

$$\begin{aligned} &\delta A_\mu=i\xi^{\alpha i}\sigma_{\mu\alpha\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}{}_i-i\psi^{\alpha i}\sigma_{\mu\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}{}_i \\ &\delta\psi_\alpha{}^i=\sigma^{\mu\nu\beta}_\alpha\xi_\beta{}^iF_{\mu\nu}+\sqrt{2}i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}D_\mu\phi\bar{\xi}^{\dot{\alpha}i}+[\phi,\bar{\phi}]\xi_\alpha{}^i \\ &\delta\bar{\psi}_{\dot{\alpha}i}=-\bar{\xi}_{\dot{\beta}i}\bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}F_{\mu\nu}+\sqrt{2}i\xi^{\alpha i}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}D_\mu\bar{\phi}-[\phi,\bar{\phi}]\bar{\xi}_{\dot{\alpha}i} \\ &\delta\phi=\sqrt{2}\xi^{\alpha i}\psi_{\alpha i} \\ &\delta\bar{\phi}=\sqrt{2}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}_i\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}{}^i \end{aligned} \tag{3.65}$$

であった．

トポロジカルツイスト

いよいよ，この超対称ヤン-ミルズ理論をツイストすることで位相的場の理論（コホモロジカルな位相的場の理論）と読み替える手続きを見る．H の中の $SU(2)_R \times SU(2)_I$ の対角和で作る $SU(2)_{R'}$ に注目する．回転を組み替えて

$$K' = SU(2)_L \times SU(2)_{R'} \tag{3.66}$$

とみなすことを**トポロジカルツイスト** (topological twist) というのである．$SU(2)_R \times SU(2)_I$ の二つのスピンの変換を合成してスカラーな変換量とベクトルの変換量，自己双対な量に組み替えるのである．つまり K' のもと，超対称生成子や超対称変換のパラメータなどのスピノルの組は $(1/2,0,1/2) \oplus (0,1/2,1/2)$ から $(1/2,1/2) \oplus (0,1) \oplus (0,0)$ と書き換えることができる．特に $(0,0)$ は**スカラー** $Q = \varepsilon^{\dot{\alpha}i} \bar{Q}_{\dot{\alpha}i}$ であるからこれは BRS 生成子とみなせる．$\varepsilon^{\dot{\alpha}i}$ は反対称テンソルとした（$i,j,\cdots$ は $SU(2)_I$ の添字，$\dot{\alpha}$ は $SU(2)_R$ の添字）．つまり超対称変換のパラメータを，$i = \dot{\beta}$ として，フェルミオニックスカラーな ϱ を用いて

$$\bar{\xi}^{\dot{\alpha}i} = \bar{\xi}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \varrho \tag{3.67}$$

とみなし，$SU(2)_I$ の添字と $SU(2)_R$ の添字で縮約をとっているのである．フェルミオニック（グラスマン奇）なスカラー量は冪零だから Q も冪零なので BRS 生成子とみなせるのだ．フェルミオンの場は超対称性生成子同様にツイストされ

フェルミオン	ψ^i	$\longrightarrow$	ψ_μ		$\bar{\psi}^i$	$\longrightarrow$	$\chi_{\mu\nu},\ \eta$
量子数	$\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$	$\longrightarrow$	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$		$\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	$\longrightarrow$	$(0,1)\oplus(0,0)$

と置き換えられる[7]．超対称変換も $(0,1/2,1/2)$ の超対称変換パラメータを持つものだけに注目し，先ほどの $Q = \varepsilon^{\dot{\alpha}i} \bar{Q}_{\dot{\alpha}i}$ 同様にスカラー変換である BRS 変換のみを抜き出すことで

---

[7] この章では超対称変換に関してはツイスト後スカラーになった Q のみを BRS 変換として注目している．しかし他のフェルミオン同様に，$Q_\mu, Q_{\mu\nu}$ などがツイストの結果として当然現れる．5 章では実際に Q_μ が活用される．

$$
\begin{aligned}
&\delta A_\mu = i\psi_\mu, \quad \delta\psi_\mu = -D_\mu\phi, \quad \delta\phi = 0 \\
&\delta\chi_{\mu\nu} = H_{\mu\nu}, \quad \delta\bar{\phi} = i\eta \\
&\delta H_{\mu\nu} = i[\phi, \chi_{\mu\nu}], \quad \delta\eta = [\phi, \bar{\phi}]
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

という対称性がある理論と見直すことができる．適当な場の再定義を行えば，(3.53) と同じものを構成できたわけである．

この置き換えによって，前節の位相的場の理論が導かれる．模式的に書くと以下のようになる．

$$
\text{「}\mathcal{N}=2\ \text{超対称ヤン-ミルズ」} \underset{\text{ツイスト}}{\Longrightarrow} \text{「位相的ヤン-ミルズ理論」}
$$

ツイストという操作は $\mathbb{R}^4$ 上ではいつでも行えるが一般の多様体上では常に行えるわけではない．どのような場合に行えるのか考える必要がある．

ケーラー多様体の場合

ケーラー多様体ではホロノミー群は $SU(2)_L \times U(1)$（$U(1)$ は $SU(2)_R$ の部分群）と小さくなっている．大局的な作用素である BRS 作用素を構成するには通常，$SU(2)_R$ のシングレット（つまりスカラー）を $SU(2)$ の不変テンソルである反対称テンソルで足をつぶすことで構成する以外にない．つまり $SU(2)$ の 2 次元表現では与えられた二つのダブレット v_α, w_β から作られる不変量は反対称テンソル ε を用いて $\varepsilon^{\alpha\beta}v_\alpha w_\beta$ である．しかし $U(1)$ であるならば，クロネッカーのデルタで足をつぶし $\delta^{\alpha\beta}v_\alpha w_\beta$ としても不変量でありスカラー量を作ることができる．つまり $\varepsilon^{\dot{\alpha}i}\bar{Q}_{\dot{\alpha}i}$ と $\delta^{\dot{\alpha}i}\bar{Q}_{\dot{\alpha}i}$ の 2 種類の BRS 生成子が作られることになる．さらに言うと $\mathcal{N}=2$ のうちの二つの $\mathcal{N}=1$ のそれぞれに対応する BRS 作用素を構成することができる．

ハイパーケーラー多様体の場合

ホロノミー群はさらに $SU(2)_L$ に落ちる．R に対してホロノミー群が自明になるので，ツイストを自明に行うことができる．あるいはわざわざツイストを行わなくてもトポロジカルな理論に見えると言ってもよい．したがってハイパーケー

ラー多様体上で，分配関数や対応する観測可能量がツイスト後も存在する場合のオブザーバブルの真空期待値などは，$\mathcal{N}=2$ 超対称理論と位相的場の理論での計算結果は一致する．

3.5.2 ウィッテンの考察

$\mathcal{N}=2$ 超対称性ヤン-ミルズ理論とドナルドソン理論の結びつきを見た今，ウィッテンがどのようにサイバーグ-ウィッテン不変量にたどり着いたのかという思考の道筋をたどることができる．ウィッテンは BRS-完全 (exact) な質量項を作用に加えることで，$\mathcal{N}=2$ 超対称性を $\mathcal{N}=1$ 超対称性に破ることを考えた．ここで質量項を定義するためにケーラー 2 形式を用いているので，以下はケーラー多様体の場合に限る．BRS-完全 (exact) な項を足すことは，ゲージ固定を変形することであるから位相的場の理論の立場では，何の変更もしていないことになるが，いろいろ解析しやすい面があるのだ．しかし本来 $\mathcal{N}=2$ の超対称空間の回転を使ってツイストしてトポロジカルな理論の元となる BRS 作用素をつくるのだから,「質量項を入れて超対称性を $\mathcal{N}=1$ に壊すと位相的対称性がなくなる」と考えるかもしれない．

しかしケーラー多様体の場合は 2 種類の BRS があったことを思い出してほしい．したがって，質量項を入れても位相的性質は壊れないということが生じる．

次に「質量があると質量を持った粒子による相互作用は遠距離には及ばない」という事実が発生する．一方で位相的対称性から適当に計量 $g^{\mu\nu}$ をスケーリングで引き伸ばしても観測量の期待値は不変である．観測量の期待値がこの場合に交点数として得られる．その理由は以下の通りである．期待値は伝播関数関数すなわちグリーン関数で計算されるのは場の理論の一般論の通りである（1.6.2 節参照）．

$$
\begin{aligned}
Z[J] &\equiv \int \mathcal{D}f \exp\left(-\frac{1}{2}\int \{\langle f(x), Mf(x)\rangle + \langle J(x), f(x)\rangle\}\right) \\
&= (\det M)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2}\int d^4x\ d^4y \langle J(x), M^{-1}J(y)\rangle\right)
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

ここで f はボゾニックな場であるとし 2 行目の等式はガウス積分した．特に質量のある場 f として運動項は $M=\partial^\mu\partial_\mu+m^2$ で与えられるとき，その伝播関数

M^{-1} は $\int dp^4 e^{ip^\mu(x-y)_\mu}\dfrac{1}{p^2+m^2}$ であるが，スケーリングで p^2 が十分小さい領域を考えるとこれは 4 次元デルタ関数 $\delta(x-y)$ となる．

2 ホモロジー元 Σ に対してオブザーバブル $\int_\Sigma f$ を定義しているというドナルドソン理論のような状況一般について考える．それは，$J(x)$ として $\int_M \langle J(x), f(x)\rangle = \int_\Sigma \tilde{f}$ というものを考えることに対応している．ただし $\tilde{f}$ は Σ への制限を表すとする．このとき

$$Z[J]=\left\langle \exp\left(\int_\Sigma \tilde{f}\right)\right\rangle \sim \exp\left(\frac{1}{2}\int d^4x\ d^4y(J(x)\delta(x-y)J(y))\right) \qquad (3.70)$$

となる．ここで J が 2 ホモロジーへの制限であったことを使うと交点のみが残り，例えば 1 点でのみ交わる二つの 2 ホモロジー Σ_1 と Σ_2 に対しては

$$\int d^4x\ d^4y(J(x)\delta(x-y)J(y)))=\int_{\Sigma_1\times\Sigma_2} d^2x_1 d^2y_2\delta(x_1-y_2)=\pm 1 \qquad (3.71)$$

となる．ただし x_1, y_2 はそれぞれ Σ_1 と Σ_2 上の座標とした．交点での座標 x_1, y_2 がもともとの 4 次元多様体の向きと合うか逆かで符号 ± 1 がでることがわかる．単に 2 次元面を 4 次元に埋め込んだ座標の向きを拾った符号を与えるだけという結果が，質量項を入れることで得られるのである．このことから，ドナルドソン不変量が交点からの寄与で評価できることがわかる．

簡単のため，ドナルドソン不変量 (3.60) のうち $\langle e^{\hat{v}}\rangle$ の部分を見てみる．$\langle e^{\hat{v}}\rangle$ から出てくる $\langle \hat{v}\hat{v}\rangle$ は自己交点を含み，その交点のところのみで評価できる．この結果がドナルドソン不変量に対するクロンハイマー-ムロウカの構造定理 (P.B. Kronheimer, T. Mrowka)

$$\langle e^{\sharp(v\cap v)}\rangle \times e^{a\chi+b\sigma} \qquad (3.72)$$

であると推察したのである[8]．ただし分配関数からの寄与が局所的なもので書け

[8] ハイパーケーラー多様体であればこれでよいが，一般のケーラー多様体の場合には補正がつく．というのは質量項をケーラー 2 形式を用いて導入したため，一般のケーラー多様体では 0 になる点が存在するからだ．

るとして，その可能な組み合わせの一般項としてオイラー数 χ と符号数 σ と適当な定数 a,b を用いて $e^{a\chi+b\sigma}$ とした．$\hat{u}$ を含む一般のオブザーバブル (3.60) の場合も同様に考えることができる．

「$\mathcal{N}=2$ 超対称ヤン-ミルズ理論」は双対性から強結合極限でモノポールやダイオンといった BPS 粒子を基本粒子と思える理論で記述できるという予想が立つことを 2.3 節で見た．2.3 節ではハイパー多重項を加えずに議論していたが，モノポールを基本的な粒子として記述するには，ハイパー多重項を用いるべきである．ウィルソン流の有効作用のもともとの意味の説明を思い出してほしい．低エネルギー有効理論は，高エネルギーでしか影響を発揮しない場は経路積分で消去するという哲学のもとで構成されている．つまりあるセッティングでは経路積分で消去され，有効作用には現れない場も，他の状況では有効作用に現れても何の不思議もない．

有効作用のところで特異点がでる理由を説明した箇所（1.8 節）を思い出してほしい．質量が 0 でない粒子は先に経路積分されて消えてしまっていたので，理論が変形して質量が 0 になった場合，その場は積分で消去することをやめて残しておかなければならないのである．そういう事情から「ハイパー多重項」を加えたモノポール理論であるとして，満たすべき対称性を要請しておけば問題はない．そして「$\mathcal{N}=2$ 超対称ヤン-ミルズ理論」はツイストすることで位相的場の理論すなわちドナルドソン理論とみなせるわけである．こうしてドナルドソン理論が「サイバーグ-ウィッテン理論」になるべしという筋道が見えてきた．

ハイパー多重項を加えた場合についてさらに詳しく見ることにしよう．二つのワイルフェルミオン ψ_q と $\psi^\dagger_{\tilde{q}}$ と複素スカラーボゾン q と $\tilde{q}^\dagger$ の組

$$\begin{array}{ccc} & \psi_q & \\ q & & \tilde{q}^\dagger \\ & \psi^\dagger_{\tilde{q}} & \end{array} \tag{3.73}$$

をハイパー多重項と呼んでいる．

超対称変換は († 付きは省略するが)

$$\delta q^i = -\sqrt{2}\xi^{\alpha i}\psi_{q\alpha} + \sqrt{2}\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}{}^i\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}_{\tilde{q}}$$
$$\delta\psi_{q\alpha} = -\sqrt{2}i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}D_{\mu}q^i\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}{}_i - 2T_a q^i\bar{\phi}^a\xi_{\alpha i}$$
$$\delta\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}_{\tilde{q}} = -\sqrt{2}i\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}D_{\mu}q^i\xi_{\alpha i} + 2T_a q^i\phi^a\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}{}_i \tag{3.74}$$

である．ただし，ゲージ群の表現として基本表現であるとし，リー環の生成子を T_a と書いている．これも通常のツイストをすることができる．前のとき同様 $\xi^{\alpha i}=0$ として残りの部分から BRS 作用素を構成するパラメータを

$$\bar{\xi}^{\dot{\alpha}i} = \bar{\xi}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varrho \tag{3.75}$$

とする（$i,j,\cdots$ は $SU(2)_I$ の添字，$\dot{\beta}$ は $SU(2)_R$ の添字）．ただし，ϱ は反交換なパラメータである．ツイストされると BRS 変換になり

$$\delta q^{\dot{\alpha}} = -\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}_{\tilde{q}}, \qquad \delta q^{\dagger}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\psi}_{q\dot{\alpha}}$$
$$\delta\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}_{\tilde{q}} = -i\phi^a T_a q^{\dot{\alpha}}, \qquad \delta\bar{\psi}_{q\dot{\alpha}} = iq^{\dagger}_{\dot{\alpha}}\phi^a T_a \tag{3.76}$$

である．ただし適当なスケールの取り直しをしている[9)]．

†の記号について注意しておく．${q_{\alpha}}^{\dagger}$ と ${q_{\dot{\alpha}}}^{\dagger}$ は複素共役を $*$ で転置を t で書くと

$${q_{\alpha}}^{\dagger} = \varepsilon^{\alpha\beta}{q_{\beta}}^{*t}, \qquad {q_{\dot{\alpha}}}^{\dagger} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{q_{\dot{\beta}}}^{*t} \tag{3.77}$$

と定義している．ユークリッド計量では $SU(2)_L$ と $SU(2)_R$ は独立にとることができていたので，点付と点なしスピノルは独立である．そういった事情でこういう定義となっている．

こうして位相的場の理論としてモノポールの理論を作る準備は整った．次の節では具体的にそれを見てみる．$\mathcal{N}=2$ 超対称理論の量子論ではゲージ対称性が $U(1)$ から $SU(2)$ に回復することはなかったことを思い出そう．

3.5.3 サイバーグ-ウィッテン不変量

サイバーグ-ウィッテン不変量を位相的場の理論として経路積分を用いて定式化する．ゲージ群を初めから $U(1)$ に制限してもいいが，非アーベリアンに拡張しておいたもので定義しておくと，ドナルドソン理論との関係を見ることも容

9) $\phi \to \frac{i}{2\sqrt{2}}\phi$, $\sqrt{2}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}_{\tilde{q}} \to \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}_{\tilde{q}}$, $\sqrt{2}\bar{\psi}_{q\dot{\alpha}} \to \bar{\psi}_{q\dot{\alpha}}$.

易である．また扱う多様体がスピン多様体とは限らない．例えば $\mathbb{C}P^2$ はスピン多様体ではない．そのため Spin^c 構造，すなわち構造群として $\mathrm{Spin}^c := \mathrm{Spin} \times U(1)/\{\pm 1\}$ を考えることにする．詳しいことは参考文献 [24], [25] に任せるが，スピノルが正しく定義されるように適当な条件を付けた複素直線束 L を導入し $U(1)$ ゲージ場をスピノルの結合させておくのだ．したがって，この節で出てくる共変微分は全てゲージ場以外に Spin^c 接続を含むものとする．

トポロジカルツイストで得られた BRS 変換則を，マタイ-キレン形式に沿うように場の再定義を行ったものを $\hat{\delta}$ を用いて表すことにしよう．ベクトル多重項については (3.53) で与えられる．ハイパー多重項に関しては，ボゾニックなワイルスピノルである補助場 $H_{q\alpha}, H_q^{\dagger\alpha}$ も導入して

$$\begin{cases} \hat{\delta} q^{\dot{\alpha}} = \psi_q^{\dot{\alpha}} \\ \hat{\delta} \psi_q^{\dot{\alpha}} = \delta_g q_q^{\dot{\alpha}} = -i\phi q_q^{\dot{\alpha}} \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{\delta} \chi_{q\alpha} = H_{q\alpha} \\ \hat{\delta} H_{q\alpha} = \delta_g \chi_{q\alpha} = -i\phi \chi_{q\alpha} \end{cases} \tag{3.78}$$

$$\begin{cases} \hat{\delta} q_{\dot{\alpha}}^{\dagger} = \psi_{q\dot{\alpha}}^{\dagger} \\ \hat{\delta} \psi_{q\dot{\alpha}}^{\dagger} = \delta_g q_{\dot{\alpha}}^{\dagger} = i q_{\dot{\alpha}}^{\dagger} \phi \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{\delta} \chi_q^{\dagger\alpha} = H_q^{\dagger\alpha} \\ \hat{\delta} H_q^{\dagger\alpha} = \delta_g \chi_q^{\dagger\alpha} = i \chi_q^{\dagger\alpha} \phi \end{cases} \tag{3.79}$$

とする．ゲージフェルミオンも一般論に従い

$$\begin{aligned} \Psi = {} & \chi_+^{\mu\nu a} \{ H_{+\mu\nu}^a - i(s_{+\mu\nu}^a) \} + \chi_q^{\dagger\alpha} \{ H_{q\alpha} - i(s_\alpha) \} + \{ H_q^{\dagger\alpha} - i(s^{\dagger\alpha}) \} \chi_{q\alpha} \\ & + i[\phi, \bar{\phi}]^a \eta^a + D_\mu \bar{\phi}^a \psi^{\mu a} - (-i q_{\dot{\alpha}}^{\dagger} \bar{\phi}) \psi_q^{\dot{\alpha}} - \psi_{q\dot{\alpha}}^{\dagger} (i \bar{\phi} q^{\dot{\alpha}}) \end{aligned} \tag{3.80}$$

とする．ただし

$$\begin{aligned} s_a^{\mu\nu}(A, q, q^\dagger) &= F_a^{+\mu\nu} + q^\dagger \bar{\sigma}^{\mu\nu} T_a q \\ s^\alpha(A, q) &= (\sigma^\mu D_\mu q)^\alpha =: (\not{D} q)^\alpha \end{aligned} \tag{3.81}$$

としている．BRS-完全 (exact) なラグランジアン $\mathcal{L} = \hat{\delta}\Psi$ は以下で与えられる．

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = {} & H_+^{\mu\nu a} \{ H_{+\mu\nu}^a - i s_{+\mu\nu}^a \} \\ & + \chi_+^{\mu\nu a} \{ -i[\chi_{+\mu\nu}, \phi]^a + 2i D_\mu \psi_\nu^a + i \psi_q^\dagger \bar{\sigma}_{\mu\nu} T^a q + i q^\dagger \bar{\sigma}_{\mu\nu} T^a \psi_q \} \\ & + H_q^{\dagger\alpha} \{ H_{q\alpha} - i s_\alpha \} + \chi_q^\dagger \{ i \not{D} \psi_q - \sigma_\rho \psi^\rho q \} + (\text{直前 2 項の } h.c.) \end{aligned}$$

$$-[\phi,\bar{\phi}]^a[\bar{\phi},\phi]^a+D_\mu\bar{\phi}^a D^\mu\phi^a+i[\phi,\eta]^a\eta^a+D_\mu\eta^a\psi^{\mu a}+i[\psi_\mu,\bar{\phi}]^a\psi^{\mu a}$$
$$+(-iq^\dagger\bar{\phi})(i\phi q)+(+iq^\dagger\phi)(i\bar{\phi}q)$$
$$+2\psi_q^\dagger(i\bar{\phi})\psi_q+2\chi_q^\dagger(i\phi)\chi_q-(-iq^\dagger\eta)\psi_q+\psi_q^\dagger(i\eta q)$$

この理論はトポロジカル QCD とも呼ばれる．複雑な作用であるが全てを見なくても，一般論に従って考えることで解析できる．補助場の積分などを行うと

$$S=\int d^4x\sqrt{g}\left[\frac{1}{4}|s^{\mu\nu}|^2+\frac{1}{2}|s^\alpha|^2\right]+\cdots \tag{3.82}$$

となる．つまり，この章の初めに述べた一般論に沿ってサイバーグ-ウィッテン不変量の理論を構築するために，一般論における一般のボゾン場 ϕ をここではゲージ場とハイパー多重項のボゾニックなスピノル (A,q) とし，一般論における切断 $s[\phi]$ に対応しここでは切断を (3.81) と選んだことになっている．

$$s^{\mu\nu}[A,q,q^\dagger]=0, \qquad s^\alpha[A,q]=0 \tag{3.83}$$

がサイバーグ-ウィッテンモノポール方程式であり，その解はモノポールになっている．一般論で議論したように切断がゼロである部分からの寄与が観測量の経路積分でのこり，**期待値がモノポールのモジュライ空間の積分になった．**

特にゲージ群を $U(1)$ とした場合に観測量の期待値をとることで「サイバーグ-ウィッテン不変量」が得られる．

特に興味がある状況として，サイバーグ-ウィッテンモノポール方程式のモジュライ空間の形式的な次元が 0 である場合を考える．次元は 4 次元多様体 M のオイラー数 χ と符号数 σ を用いて

$$-\frac{2\chi+3\sigma}{4}+c_1(L)^2 \tag{3.84}$$

で与えられることが知られている．L はこの節の最初に導入した Spin^c 構造を導入するための複素直線束で，$c_1(L)^2=\int_M c_1\wedge c_1$ を表している．モジュライ空間の次元が 0 であるということは，$c_1(L)^2=(2\chi+3\sigma)/4$ であるが，このとき，$x=c_1(L)$ と置いてサイバーグ-ウィッテン基本類と呼ぶことにする．

一般論で見たようにこの場合は，フェルミオンゼロモードが存在せず，した

がってオブザーバブルを入れる必要が無い場合となる．(3.25) で見たように分配関数の部分からモノポール方程式 (3.83) の解の個数を符号付で足しあげるものが出てくる．

$$n_x = \sum_i \pm 1 \tag{3.85}$$

x を決めたときにそれに応じてモノポール方程式の孤立解がある個数だけ存在し，その一つ一つについてラベルを付けたものが i である．i 番目のモノポール解各々について符号が決まり，それを足しあげたものがサイバーグ-ウィッテン不変量として得られるのである．

経路積分でみるドナルドソン不変量とサイバーグ-ウィッテン不変量の関係

経路積分で定式化されたドナルドソン不変量とサイバーグ-ウィッテン不変量が $b_2^+ \geq 3$（b_2^+ は $H^2(M;\mathbb{Q})$ 上の交叉形式の正の固有値の数で定義する）で同等の値を与えることを，双対性を用いずに，大雑把に見る方法についても概略を簡単に述べる [31] [10]．$SU(2)$ ゲージ群を持つトポロジカル QCD（ハイパー多重項を含むゲージ理論）から出発する．大局的 $U(1)$ 回転対称性が存在するのでそれを用いて質量 m を導入することができる．m は大局的 $U(1)$ 回転のパラメータとして導入できる．つまり (3.53) と (3.78) で定義した BRS 変換は 2 乗すると ϕ を生成子とするゲージ変換であったが，さらに定数 m で生成される $U(1)$ 変換を付け加える変形 BRS 変換を導入する．

次に観測量 $\langle \exp(\hat{v}+\tau\hat{u}) \rangle$ の真空期待値を計算する．その際，ゲージ対称性がヒッグス機構で $U(1)$ に破れる真空（すなわちサイバーグ-ウィッテン理論）と，対称性が破れない真空（ドナルドソン理論）が存在する．実際ヒッグス場 ϕ の期待値が 0 のときは $q=0$ となることが言え（多少詳しくみないとわからない事実なのでこれは認めることにする），(3.83) がインスタントン方程式 $F^+=0$ に変

---

[10] この議論は単純で理解し易いが少なからず厳密でない議論を含んでおり，その点を踏まえた上で以下を読んでいただきたい．原論文 [31] で導出される式の中では誤ったものがあり，その原因がはっきりしていないのだが，アイディアとしては有効であると思われるのでここでは紹介する．また以下の議論では多様体 M がシンプルタイプであるという条件を課すが，技術的な条件なので詳細は触れない．

化しドナルドソン理論で記述できる理論になることがわかる．

逆に ϕ の期待値が 0 でなければヒッグス機構で $U(1)$ に破れるが，(3.83) が $U(1)$ のサイバーグ-ウィッテンモノポール方程式となる．真空期待値は全ての真空についての非摂動的な足しあげも含むので，期待値をシンボリックに書き，それぞれの真空について分けて書くと

$$\langle TQCD\rangle = \sum_k \left(\frac{1}{m}\right)^a \langle \text{ドナルドソン} \rangle + \sum_x \left(\frac{1}{m}\right)^b \langle \text{サイバーグ-ウィッテン} \rangle$$

となる．a,b は指数定理で決まる数である．もともとの理論は m が 0 でも定式化できているので，$m\to 0$ で特異でないはずであるなど，いろいろな議論から m の各冪でキャンセルすべしということが要請され $\langle$ ドナルドソン $\rangle$ と $\langle$ サイバーグ-ウィッテン $\rangle$ の関係があらわに書き下せる．**「ドナルドソン不変量＝サイバーグ-ウィッテン不変量」が双対性なし**でも以上の議論から（多少いいかげんだが）導かれる．結果を書くと

$$\begin{aligned}&\langle \exp(\hat{v}+\tau\hat{u})\rangle \\ &\quad = 2^{1+\frac{7\chi+11\sigma}{4}}\left(\exp\left(\frac{v\cdot v}{2}+2\tau\right)\sum_x n_x e^{v\cdot x} + i^{\frac{\chi+\sigma}{4}}\exp\left(-\frac{v\cdot v}{2}-2\tau\right)\sum_x n_x e^{-iv\cdot x}\right)\end{aligned} \tag{3.86}$$

となる．ただし $v\in H_2(M;\mathbb{Z})$ であり，x はサイバーグ-ウィッテン基本類である．左辺の $\langle \exp(\hat{v}+\tau\hat{u})\rangle$ は，トポロジカル QCD についての真空期待値（経路積分）ではなく，ドナルドソン (コホモロジカルヤン-ミルズ) 理論の真空期待値であり，(3.60) のドナルドソン不変量の母関数そのものである．これがクロンハイマーとムロウカによって与えられた構造定理をウィッテンによりサイバーグ-ウィッテン不変量を用いて書き下したものである [28], [29].

この節の最後にいくつかのコメントをしておく．当初，ドナルドソン不変量とサイバーグ-ウィッテン不変量の関係はベッチ数に関して $b^1(M)=0$ と $b^+(M)\geq 3$ の条件付きで提出されたが，シンプルタイプではない $b^1(M)\geq 0$ と $b^+(M)\geq 1$ の場合にさらに拡張されている [32]． [32] のなかでは，ドナルドソン不変量とサイバーグ-ウィッテン不変量の関係の導出を異なる方法で直接的に行っているので，興味のある読者は挑戦してみるのがいいと思われる．

3.6 ヴァッファ-ウィッテン理論（$\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論）

コホモロジカル位相的場の理論の応用で，双対性 (S-duality) が見える顕著な例としてヴァッファ-ウィッテン理論についてこの節では考えてみる．特に K3 上の $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論の双対性を調べるということを考え，その場合のツイストで得られる位相的場の理論は，均衡化位相的場の理論と呼ばれる．

3.6.1 均衡化（Balanced）位相的場の理論

初めに均衡化（Balanced）位相的場の理論の理論を導入しよう．

コホモロジカルな位相的場の理論

通常のコホモロジカルな位相的場の理論は，BRS 作用素を一つ用意して定式化された．均衡化 (Balanced) 位相的場の理論には二つの BRS 作用素が登場するので区別のため，今までの BRS 作用素を δ_+ で書き直して

$$x_\mu \xrightarrow{\ \delta_+\ } \psi_\mu \quad , \quad \chi_a \longrightarrow H_a \tag{3.87}$$

と置くことにする．位相的場の理論と書いてはいるが簡単のため，ここでは有限次元の場合の例を用いている（3.2.1 節参照）．普通のコホモロジカルな位相的場の理論の作用は

$$\begin{aligned} S &= \delta_+ \left(\frac{1}{2} \chi_a (2 s^a + A_\mu^{ab} \psi^\mu \chi_b + b^a) \right) \\ &= \frac{1}{2} |s^a|^2 - \frac{1}{2} \chi_a \Omega_{\mu\nu}^{ab} \psi^\mu \psi^\nu \chi_b - i \nabla_\mu s^a (\psi)^\mu \chi_a \end{aligned} \tag{3.88}$$

で与えられていた．$s(x)=0$ の解の周りで展開すると

$$|s^a(x)|^2 = (\nabla_\mu s^a x^\mu)^2 + \cdots \tag{3.89}$$

なので，ボゾン x のガウス積分から $1/\sqrt{\det|\nabla_\mu s^a|^2}$ が得られた．フェルミオン ψ, χ 積分より $\det(\nabla_\mu s^a)$ が得られる．したがってこれらの行列式は約分されて符号 ± 1 だけが出る（位相的場の理論はオーバーオールにかかっている結合定数に依存しないことからガウス積分で評価することで十分だったので，2 次の項の

$\nabla_\mu s^a(\psi)^\mu\chi_a$ のゼロモード以外は $\nabla_\mu s^a(\psi)^\mu\chi_a$ のフェルミオニックなガウス積分でよかった）．2次の項の $\nabla_\mu s^a(\psi)^\mu\chi_a$ が0となるゼロモードの積分を

$$\int \mathcal{D}\psi_0\mathcal{D}\chi_0 e^{-\frac{1}{2}\chi_{a0}\Omega^{ab}_{\mu\nu}\psi_0^\mu\psi_0^\nu\chi_{b0}} = \chi(V|s^{-1}(0)) \tag{3.90}$$

と書くと分配関数は

$$Z = \sum_k \varepsilon_k \chi_k(V|s^{-1}(0)) \tag{3.91}$$

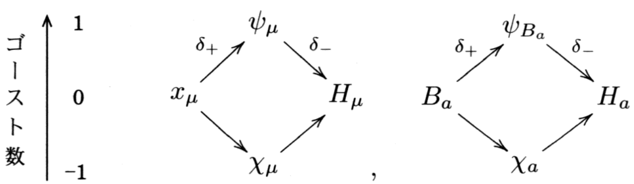
で与えられる．k は真空を特徴付ける添字で，$\varepsilon_k = \pm 1$ である．$\chi_k(V|s^{-1}(0))$ はマタイ-キレン形式のところで見たようにベクトル束のオイラー数である．つまり分配関数とは**符号付きでオイラー数を足しあげる**ようなものと言える（ただしゼロ，$s(x)=0$ が0次元でない限りゴースト数アノマリーによって分配関数は0であった）．符号をそろえるとゲッチェの公式 (L. Göttsche) が使えるなどの利点があるから，符号なしのオイラー数の足し上げを与えるような，位相的場の理論を考えることは意味のあることであろう．そのようなものが，均衡化（Balanced）位相的場の理論である．

均衡化（Balanced）位相的場の理論

BRS 作用素を二つ用意する．δ_+ はゴースト数を一つふやす冪零な作用素，δ_- はゴースト数を一つ減らす冪零な作用素であるとする．

$${\delta_+}^2 = {\delta_-}^2 = 0, \qquad \delta_+\delta_- + \delta_-\delta_+ = 0 \tag{3.92}$$

ゴースト数のバランスをとるよう，対称な構成要素を導入しよう．



(3.93)

ここでボゾン H_μ, B_a とフェルミオン χ_μ, ψ_{Ba} が新しく付け加えられた場である．B_a, ψ_{Ba} の添字 a は，切断 $s^a(x)$ と同じであり，つまり $s_a(x)$ と同じ変換性を示すものと定義した．右上に行く矢印が δ_+ による変換を表し，右下に行く矢

印は δ_- による変換を表している．したがってゴースト数も一番上の行が 1, 真ん中の行が 0, 下の行は－ 1 が割り振られている．さらに符号がでないように作用を

$$
\begin{aligned}
S=&\delta_+\left(\frac{1}{2}\chi_a(2is^a+A_\mu^{ab}\psi^\mu\chi_b+H^a)\right)\\
&+\delta_+\left(\frac{1}{2}\chi_\mu(2iB_a\nabla_\mu s^a+H_\mu)\right) \leftarrow \text{均衡化}\\
=&\frac{1}{2}|s^a|^2-\frac{1}{2}\chi_a\Omega_{\mu\nu}^{ab}\psi^\mu\psi^\nu\chi_b-i\nabla_\mu s^a(\psi)^\mu\chi_a\\
&+\frac{1}{2}|B_a\nabla_\mu s^a|^2+\frac{1}{2}\chi_\mu(\nabla_\mu s^a)\psi_{Ba}+\cdots
\end{aligned}
\tag{3.94}
$$

とする．2 番目の等式は，補助場 H_μ, H_a をガウス積分で消去したものである．この作用のモジュライ空間の積分すなわちゼロモード積分では効いてこない部分は，実はボゾニックなスカラー汎関数 $\mathcal{F}=H^a s_a(x)-\chi^a\psi_{Ba}-\chi^\mu\psi_\mu$ を用いて $\delta_+\delta_-\mathcal{F}$ と書かれることにも注意されたし．さらに切断 $s_a(x)$ は一般に x だけではなく B_a の汎関数 $s_a(x_\mu, B_a)$ とできる．ボゾンのガウス積分をすると $1/\det|\nabla_\mu s^a|^2$ が得られ，フェルミオンを積分すると $\det|\nabla_\mu s^a|^2$ であることがわかるであろう．つまり，ガウス積分がフェルミオンとボゾンで全く同じ項が出てきて符号も出ずに打ち消しあうという作用になっている．

このように δ_+ と δ_- について対称に作用を構成することで，ゴースト数が逆の ψ_μ と χ_μ, χ_a と ψ_{Ba} のゼロモードが等しくなりゴースト数アンバランスが素朴には存在しないと期待できる．実際 (3.94) をこれらフェルミオンで変分して得られる運動方程式の線形部分は，ψ_μ と χ_μ, χ_a と ψ_{Ba} で同じである．しかし，ゴースト数アノマリー，すなわちフェルミオンのゼロモードの問題が解決されているかどうかは，モデルによって詳細に調べる必要がある．

以下ではゴースト数アノマリーの問題がない場合について考える．ゴースト数アノマリーがないということは $s^{-1}(0)$ の空間が広がっていて次元が 0 ではなくても分配関数が 0 でない量が得られるということだ．モジュライ空間の連結部分にラベル k をつけると，ゼロモードの積分はそのモジュライ空間上での積分として対応し，

$$
\int\mathcal{D}\psi_0\mathcal{D}\chi_0\mathcal{D}x_0 e^{-\frac{1}{2}\chi_{a0}\Omega_{\mu\nu}^{ab}\psi_0^\mu\psi_0^\nu\chi_{b0}}=\chi_k(s^{-1}(0))
\tag{3.95}
$$

となる．これらの結果から 分配関数は

$$Z=\sum_k \chi_k(s^{-1}(0)) \tag{3.96}$$

となることがわかる．ここで $\chi_k(s^{-1}(0))$ は，$s^{-1}(0)$ をベースとして定義されたベクトル束のオイラー数であるが，そのベクトル束が接ベクトル束となり $s^{-1}(0)$ のオイラー数そのものになる場合があることも重要である．次の節で扱うヴァッファ-ウィッテン理論はその例となっている．まとめると，均衡化 (Balanced) 位相的場の理論の分配関数は**符号のないオイラー数の足しあげになる**ことがわかった．

3.6.2　ヴァッファ-ウィッテン理論

前節で考えた均衡化位相的場の理論の具体的な応用例として，ゲージ群が $SU(N)$ のドナルドソン理論を均衡化することを試みる（ただし，詳細に立ち入ると様々な問題をクリアするため長くなって要点がぼやけるので，前節の流れに沿って核心の部分を中心に解説する）．そうすることでインスタントンモジュライ空間のオイラー数の足しあげを考えることが目標である．切断 s^a として $F^{+\mu\nu}$ を選んでコホモロジカルな位相的場の理論を作るとドナルドソン理論が得られた．これを均衡化するには一般論に従って，$F^{+\mu\nu}$ と同じ足をもった自己双対な 2 階のテンソル $B^{\mu\nu}$ などを加えるといい．

$$\begin{array}{ccccc} & & \psi_\mu & & \\ & \overset{\delta_+}{\nearrow} & & \overset{\delta_-}{\searrow} & \\ A_\mu & & & & H_{B_\mu} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \chi_{B_\mu} & & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccccc} & & \psi_{B_{\mu\nu}} & & \\ & \overset{\delta_+}{\nearrow} & & \overset{\delta_-}{\searrow} & \\ B_{\mu\nu} & & & & H_{\mu\nu} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \chi_{\mu\nu} & & \end{array} \tag{3.97}$$

作用も一般論に従い

$$\begin{aligned} S=&\int \delta_+\{\chi^a_{+\mu\nu}(H_a^{+\mu\nu}-i(F_a^{+\mu\nu}-i[B^+_{\mu\rho},B^+_{\nu\sigma}]_a g^{\rho\sigma}-i[B^+_{\mu\nu},c]_a))\} \\ &+\int \delta_+\{\chi_B^{\rho a}(H^a_{B\rho}-i(-2D^\mu B^a_{+\mu\rho}-D_\rho c^a))\} \\ =&(\text{トポロジカルツイストされた}\ \mathcal{N}=4\ \text{超対称ヤン-ミルズ理論}) \end{aligned} \tag{3.98}$$

で定義する．BRS-完全 (exact) であることからコホモロジカルな位相的場の理論であるとともに，均衡化されたものとなっている．$\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン-ミルズ理論のツイスト理論としても得ることができる．しかしそのツイストの仕方の詳細には触れないことにするが，基本的な方法は $\mathcal{N}=2$ 超対称ヤン-ミルズ理論のツイストのときと同じである．また，以下の議論は一般論から十分可能なので，BRS 作用素を演算した結果の作用の具体的な最終形も非常に長くなるので書かない．

この作用は均衡化することでゼロ切断を定義する方程式がインスタントン方程式から変形されていて

$$
\begin{aligned}
&F^+_{a\mu\nu} - i[B^+_{\mu\rho}, B^+_{\nu\sigma}]_a g^{\rho\sigma} - i[B^+_{\mu\nu}, c]_a = 0 \\
&-2D^\mu B^a_{+\mu\rho} - D_\rho c^a = 0
\end{aligned}
$$

に変わっていることに注意されたし．つまりインスタントン方程式ではなくなってしまっているので，この理論の分配関数が一般にはインスタントンモジュライ空間のオイラー数を与えるわけではないことがわかる．実は均衡化 (Balanced) 位相的場の理論は万能ではなく，一般に場を増やすことでもともと欲しいモジュライ空間が変形を受けてしまう．このことは実際に理論の構築を試みるとわかるのであるが，今の場合も上のように方程式の変形を受けるのはやむをえない．にもかかわらず，ある特別な場合には正しくインスタントンモジュライ空間のオイラー数を計算する理論になる．そのことを次に見てみる．

消滅定理

作用のボゾンの部分を次のように書き直すことができる．

$$
\begin{aligned}
&\int_M d^4x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\left\{\left(F^+_{a\mu\nu} + \frac{1}{4}[B^+_{\mu\rho}, B^+_{\nu\sigma}]_a g^{\rho\sigma} + \frac{1}{2}[B^+_{\mu\nu}, c]_a\right)^2 \right.\\
&\quad \left. + \left(D^\mu B^a_{+\mu\rho} + \frac{1}{2}D_\rho c^a\right)^2\right\} \\
&= \int_M d^4x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\left(F^{+\,2}_{\mu\nu} + \frac{1}{4}(D_\mu B_{\nu\rho})^2 + (D_\mu c)^2 + \frac{1}{16}[B^+_{\mu\rho}, B^+_{\nu\rho}]^2 \right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{4}B^{+\mu\nu}\left(\frac{1}{6}(g_{\mu\rho}g_{\nu\tau} - g_{\mu\tau}g_{\nu\rho})R + W^+_{\mu\nu\rho\tau}\right)B^{+\rho\tau}\right)
\end{aligned}
\qquad (3.99)
$$

ただし R はスカラー曲率で W^+ はワイルテンソルの自己双対部分である．したがって $\frac{1}{4}B^{+\mu\nu}\left(\frac{1}{6}(g_{\mu\rho}g_{\nu\tau}-g_{\mu\tau}g_{\nu\rho})R+W^+_{\mu\nu\rho\tau}\right)B^{+\rho\tau}>0$ とできる計量を持つ多様体上では $B^+_{\mu\nu}=0$ 以外に解がないことになり，インスタントン方程式でモジュライ空間が定義されることになる ($B^+_{\mu\nu}=0$ の成り立つ場合を「消滅定理」が成り立つという)．K3 のようなケーラー多様体で $B^+_{\mu\nu}=0$ 以外に解はないように計量をとることができる．したがってそのような多様体の場合を考える限りは，モジュライ空間はインスタントンモジュライ空間になる．

「消滅定理」が成立する場合に限って話を進めると， 分配関数は

$$Z=\sum_{k=1}\chi(\mathcal{M}_k)q^k \tag{3.100}$$

となる．ただし $q^k=e^{-8\pi^2k/g+ik\Theta}$ つまり作用の中のインスタントン数比例部分とし，$\mathcal{M}_k$ はインスタントン数が k のインスタントンモジュライ空間，$\chi(\mathcal{M}_k)$ はそのオイラー数とした．q^k は作用のトポロジカルな項に古典解としてインスタントンを入れたものとして出てくる．$\mathcal{M}_k$ のオイラー数になるのは自明なことではない．一般にはドナルドソン理論のときのように，$\mathcal{M}_k$ 上の $\chi^{\mu\nu}$ のゼロモードが定義されているベクトル束のオイラー数が出てくる．$\mathcal{M}_k$ そのもののオイラー数が出てくるのはその余接ベクトル束のオイラー数になる場合である．$\chi_{B\mu}$ は A_μ の関数空間の余接ベクトルであり，そのゼロモード $\chi^0_{B\mu}$ は $\mathcal{M}_k$ の余接ベクトルとなっていることが $\psi_{B\mu\nu}$ の運動方程式からわかる．

ゲッチェの公式

ここでオイラー数の足し上げに関連する公式としてゲッチェの公式があったことを思い出そう．

$$\sum q^n\chi(M^{[n]})=\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{\chi(M)}} \tag{3.101}$$

$M^{[n]}$ は M^n/S_n(S_n は対称群) をブローアップして作られるヒルベルトスキームを表すとした（ヒルベルトスキームに関しては [39] や本書の次節を参照)．

例としてベースの多様体が $K3$ の場合を考えることにしよう．インスタントンモジュライ空間が $K3$ のヒルベルトスキームで与えられることが知られているの

でこの事実を使う．この事実は 3.7.2 節で物理的な描像から説明される．$\chi(K3)=24$ より，ゲッチェの公式から分配関数 (3.100) は

$$Z=\sum_{k=1}\chi(\mathcal{M}_k)q^k=\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}} \tag{3.102}$$

となる．さらに $q\sim e^{\tau}$ として，デデキント (R. Dedekind) の η 関数を用いて書き直すと

$$Z=q\frac{1}{\eta(\tau)^{24}} \tag{3.103}$$

となる．$\eta(\tau)$ がデデキントの η 関数である．η 関数の性質からこの理論すなわち $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン-ミルズ理論の双対性をみることができる．

S-双対性 [11)]

デデキントの η 関数で表されたので，**分配関数が保形形式**となっている．つまり，τ は複素数の結合定数だが，τ の $SL(2,\mathbb{Z})$ のもと，ある意味で分配関数は不変である．つまり $\tau\rightarrow-1/\tau$ の変換のもとでも不変になっているのである．結合定数の強結合と弱結合の入れ替えに対する不変性であるので，これは $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン-ミルズ理論が自分自身（正確に言うと $SU(N)$ ゲージ理論に対して $SU(N)/\mathbb{Z}_N$) との**双対性**の証拠である．

ヴァッファ-ウィッテン理論とサイバーグ-ウィッテン不変量の関係

この節の最後にヴァッファ-ウィッテンの分配関数とサイバーグ-ウィッテン不変量の関係についてコメントしておく．モジュラー不変性の仮定のもと，ヴァッファ-ウィッテンの分配関数をサイバーグ-ウィッテン不変量で書き下すことがダイグラフ (R. Dijkgraaf) 達によって行われている [34]．筆者と佐々木により $\chi+\sigma=0$ の条件がついている (χ,σ は 4 次元多様体のオイラー数と符号数）ときに双対性の仮定をもちいることなく同様の解析が行われ，分配関数のみならずインスタントン数 k のインスタントンモジュライ空間のオイラー数自体が，サイバー

11) ここで論じられている S-双対性はスパニエル-ホワイトヘッド (E. Spanier, J.H.C. Whitehead) の S-双対性とは関係ないことに注意せよ．

グ-ウィッテン不変量を用いて表された．4 次元多様体のホモロジーのみで決まる定数 $\mathcal{N}Z_{B_+}$ と，x をサイバーグ-ウィッテン基本類とするサイバーグ-ウィッテン不変量を n_x として，インスタントンモジュライ空間のオイラー数を実際にサイバーグ-ウィッテン不変量で書き下すと，$\chi_k = -\mathcal{N}Z_{B_+}\sum_x n_x \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{index}\not{D}_c^E}$（ただし $\not{D}_c^E$ はスピン ^{c} 接続を含むディラック作用素で，$\mathrm{index}\not{D}_c^E = -k + \frac{\mathrm{rank}(E)}{8}(c\cdot c-\sigma)$ である）となる [35].

3.7 超弦理論とヴァッファ-ウィッテン理論

弦理論に関する準備が十分ではないので簡単なイメージだけ述べるが，前節の双対性は弦理論でも理解できる．近年の双対性にもとづく様々な場の理論結果は，ことごとくその背後にある弦理論による説明がなされている．多くの場合は弦理論および D-ブレーンの理論に習熟していないと理解が難しいのであるが，ヴァッファ-ウィッテン理論について弦理論で概略をつかむだけならそれほど難しい議論を必要としないので試みてみる．そのことでヒルベルトスキームの物理的解釈も可能となるので，インスタントンモジュライ空間がヒルベルトスキームで与えられる描像が直感的に得られる．

3.7.1 超弦理論

超弦理論，つまり超対称性がある弦理論にどのような種類があるかまとめて見ることにしよう．といっても，それを見るにもいろいろな準備が必要だがあまりその後の議論に必要ではないので詳細は省略する．したがって不明な点は適度に読み流していただいたほうがよい．

超弦理論の種類

5 種類の超弦理論が存在する．

（1） TypeII(A,B) 超対称弦理論：A と B の 2 種

閉じた弦で構成され，10 次元で二つの超対称性を持つ，すなわち $\mathcal{N}=2$ 超対称のとき TypeII と呼ぶ．

超対称性のカイラリティーと呼ばれる量で二つの種類を区別する．閉弦の伝播方向で左と右に分けたときにそれぞれが反対のカイラリティーである TypeIIA 理論と，同じカイラリティーを持つ TypeIIB 理論とに分けられる．

（2） TypeI 超対称弦理論：開いた弦と閉じた弦を含む 10 次元の $\mathcal{N}=1$ 超対称弦理論

（3） ヘテロ超弦理論：閉じた弦

閉弦の波の伝播の方向を左と右に分けたときに左はボゾニック弦のみ，右は超対称弦という非対称な構成をした弦．左のボゾニック弦は 26 次元のうち 16 次元をトーラスにコンパクト化[12)]する．

ヘテロ弦にはゲージ群の入れ方に $SO(32)$ と $E_8 \times E_8$ の 2 種類があるため，それを別々に数えると全部で 5 種類の弦理論があることになる．特にヴァッファ-ウィッテン理論に関係する TypeIIA とヘテロ弦に後で注目する[13)]．

D-ブレーン

次に D-ブレーンとは何かということを非常に簡単に触れることにする．超対称ゲージ理論には BPS 粒子があり双対変換で基本的な力学変数が入れ替わった．つまり結合定数をフローさせると，理論で基本的な働きをする粒子がソリトン解であるモノポールやダイオンなどの BPS 粒子に取って代わる現象が起こった．弦理論にも BPS なオブジェクトがあり，やはり双対変換で基本的な働きをする物が弦と入れ替わる．それを **D-ブレーン**と呼ぶ．初めその BRS 状態は開弦のディリクレィ境界条件 (P. Dirichlet) として登場したので D-ブレーンと呼ばれる．ディリクレィ境界条件は固定端であり

$$\partial_\tau X^i|_{\sigma=0}=0 \tag{3.104}$$

で与えられる．この境界条件は，空間の i 方向に広がる壁が存在していることを意味する．

---

12) 弦理論のコンパクト化とは弦が飛ぶ背景の時空をトーラスなどに丸めることで，数学で用いられるコンパクト化と異なることに注意が必要だ．

13) TypeIIA は S^1 にコンパクト化した M 理論とみなせ，もっとも簡単に 11 次元超重力理論と関係がつく．

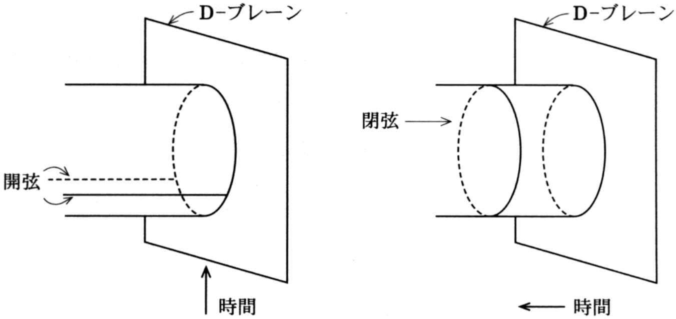


図 3.1　D-ブレーン

図 3.1 を見ていただきたい．この図は 2 通りの見方ができる (1 章で見たように，低エネルギーで開いた弦がゲージ場，閉じた弦が重力場を表していたことを思いだそう)．

（1）　開いた弦が壁から生えている．時間方向を左図の矢印の方向にとると，開いた弦が対生成し，一定時間後対消滅したとみなすことができる（ゲージ場の対生成と対消滅）．

（2）　閉じた弦が壁から放出（あるいは吸収）している．これは右図のように D-ブレーンと垂直方向を時間の方向とみなした見方である（重力と D-ブレーンが相互作用している）．

つまり「D-ブレーンを考えると，開いた弦と閉じた弦は一つの現象の異なる見方である」という描像が現れる．こうして D-ブレーンの出現が沢山あるいろいろな弦理論同士が，実は同じ物理を違う見方をしてきたものだということがわかり始めた．つまり上述の超弦理論が統一されて，それぞれ異なる見え方をした一つの理論であることがわかった．さらに，$\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論である見方では基本的な場が別のところでは BPS 粒子に見えたりするという現象を見たが，それと同じことが弦理論にも起こる．つまり，弦理論では BPS 状態である種のソリトンとして見えている D-ブレーンも，それ自体を基本的なオブジェクトとして扱っていいのである．

標語的に繰り返すと「ゲージ理論を BPS 粒子であるモノポールで記述できた

のと同様に，弦理論を D-ブレーンで記述しても等価」ということである．もっと言うとすでに「超弦理論はもはや超弦のみの理論ではなく，超弦を含む様々な次元のオブジェクトの理論である」と言うことができる．

特に空間に広がった壁 (D-ブレーン) の次元が p 次元であることを強調するときは「Dp-ブレーン」と呼ぶ．時間を含めると Dp-ブレーンは $p+1$ 次元のオブジェクトとなる．

D-ブレーンの低エネルギー有効理論

ここで 1.3.1 節で弦理論がゲージ理論や重力理論で書けたのと同様に，D-ブレーンの低エネルギー理論がどのような場の理論で書けるかについて考察する．

(1)　1 枚の D-ブレーンの低エネルギー理論

D-ブレーンが 1 枚だけある状況を考えてみよう．D-ブレーンは開いた弦の端点となる壁として定義できるのであるから，当然 D-ブレーンからは開いた弦が生成消滅され，また端が D-ブレーンについたまま弦が伝播するような状況も現れる．開いた弦の両端が D-ブレーンに張り付いたものは低エネルギーではどう見えるかというと，低エネルギーでは質量 0 のモードが重要なので，開いた弦が表すのは $U(1)$ ゲージ場である．つまり $U(1)$ のゲージ理論が D-ブレーンの低エネルギー理論として実現されるのである．

(2)　N 枚が重なった D-ブレーンの低エネルギー理論

次に D-ブレーンが N 枚重なっているような状況を考えてみよう．張り付いている弦には，どのブレーンに端を持つかで N 種類の添字で識別される（開弦の両端につく添字をチャーン-ペイトン因子 (H.M. Chan, J.E. Paton) と呼ぶ）．つまり開弦の端点は二つあるので，弦は行列に値をもつことが理解できる．向き付けできる開弦の場合ならそれが $U(N)$ の行列表現であり非アーベリアンゲージ理論であることがわかる．よって $U(N)$ ゲージ理論が (D-ブレーンの次元まで 10 次元をリダクションしたものが) 低エネルギー理論であるとわかる．

これらの主張の実際の導出はあきらめ，事実として認めてしまおう．そうしてヴァッファ-ウィッテン理論の弦理論的描像を見てみることにする．

3.7.2 弦理論とヴァッファ-ウィッテン理論

注目するのは TypeIIA 理論とヘテロ弦理論である．

TypeIIA 弦

TypeIIA 弦に現れる D-ブレーンは偶数次元であることが知られており，0, 2, 4,⋯ ブレーン等である．そこで N 枚の 4-ブレーン（時間を入れると 5 次元のオブジェクト）が $K3$ 多様体に巻きつく状態を考える．前の節の事実から $(\mathbb{R}) \times K3$ 上の $SU(N)$ ヤン-ミルズ理論で記述できることがわかる．$U(N)$ ではなく $SU(N)$ であるのは重心に対応するトレースを除いて考えるためだ．

また定常エネルギーに注目するため，時間依存部分 $\mathbb{R}$ を無視して，4 次元 $K3$ 空間上の $SU(N)$ ヤン-ミルズ理論を考える．この理論の分配関数を考える．これは均衡化された位相的場ゲージ理論の計算で見たとおりで，BPS 状態である $K3$ 上のインスタントンについて，そのモジュライ空間のオイラー数の足しあげになっていた．

$$Z = \sum_{k=1} \chi(\mathcal{M}_k) q^k \tag{3.105}$$

$$q^k = e^{-8\pi^2 k/g + ik\theta} \tag{3.106}$$

ここで k はインスタントン数であった．

ヒルベルトスキーム

今の場合のインスタントンモジュライ空間がヒルベルトスキーム $K3^{[N(k-N)]}$ で与えられることが知られている．なぜインスタントンモジュライ空間 $\mathcal{M}_k$ がヒルベルトスキーム $K3^{[N(k-N)]}$ になるか？　これを弦理論の立場から絵解きしてみよう．図 3.2 を見てもらいたい．N 枚の $K3$ 多様体上に巻きついた D-ブレーン上に n 個の D-0 ブレーンが存在する図である．D-0 ブレーンは空間の中では点でインスタントンと関係がある．

「ヒルベルトスキーム」は大体 n 点の「集合」である．n 重なった点は通常の「集合」では区別できない 1 点となるが，ヒルベルトスキームではそれらは n 点の重なりとして識別して扱うようにしていた．D-0 ブレーンはチャージを持って

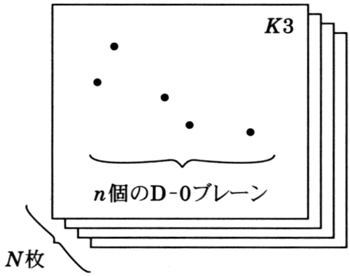


図 3.2　ヒルベルトスキーム

いて重なっても区別される．よってヒルベルトスキーム $K3^{[N\times n]}$ がモジュライ空間として現れるのである（計算の詳細は省略するが，$n=k-N$ を求めるのは R-R チャージという量を計算する．k はインスタントン数でありD-0ブレーンとインスタントンに関係がついている）．

ヘテロ弦

次に一見全く別の理論に見えるヘテロ弦について見てみる．超対称性は「右」だけに存在し,「左」向きはボゾン弦だけで26次元で定義されるのがヘテロ弦であった[14)]．26次元というのはボゾニックな理論が矛盾なく定義できる次元である．26次元を伝播するボゾニックな弦の力学的自由度は $26-2=24$ であった．一方「右」向きは超対称弦だから10次元で矛盾なく定義される．10次元では弦の力学的自由度はボゾンが8，フェルミオンも8で超対称になっている（力学的自由度とは調和振動子の数のことであり，ゲージの自由度は落せるので2減ることになる）．ボゾンとフェルミオンでは分配関数への寄与が分母と分子となり打ち消しあう．特に「右」向きは超対称により完全にキャンセルする．結局ボソンの自由度24からの寄与が残るので，分配関数計算は（1.145）の式を用いて

[14)] 26次元のうち16次元をトーラスに丸め込む（コンパクト化）ことで10次元で定義している．数学で使っているコンパクト化と意味が異なることに注意されたし．弦理論のターゲットの空間の一部を周期境界条件を課しトーラスにすることをコンパクト化と呼んでいる．

$$Z = q^{-1} \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24}} \tag{3.107}$$

で得られる．この計算は 10 次元を T^4 にコンパクト化しても変わらない (T^4 にコンパクト化する理由は後述)．したがって，**「$K3$ 上の TypeIIA 理論 $\Longleftrightarrow$ T^4 上のヘテロ弦」の弦の双対性をゲッチェの公式が再現**している．異なる弦理論同士が区別のつかない同一の理論の異なる見方であることの一つの例だというわけである．もちろん分配関数の一致は双対性の証拠の一つであり，これによって完全に証明されたわけではないが，他にも以下のような考察があるのでそれを補足しておく．

補足　「$K3$ 上の TypeIIA 理論 $\Longleftrightarrow$ T^4 上のヘテロ弦」の双対性はモジュライ空間の比較からも言える．そのことについても見てみることにしよう．ただし共形場の理論の準備をしていないので事実を述べるだけにとどめる [5].

（1）　$K3$ 上の TypeIIA 理論のモジュライ空間

$K3$ がターゲット空間の非線形 σ 模型（弦理論）のモジュライ空間が，どのように決まるかの概要を見ることにする．$K3$ のリッチ平坦計量 ($R_{\mu\nu}=0$) と 2 階の反対称テンソル $B_{\mu\nu}$ で閉 ($dB=0$) のもので決まる．それが共形場の理論である非線形 σ 模型を特徴付けるのである．

初めにアインシュタイン計量に関して考える．ヤウ (S-T. Yau) の定理によりアインシュタイン計量 $K=-c_1=0$ は正則 2 形式とケーラー形式でユニークに決まるので，H^2 を調べれば十分である．$K3$ は $T^4/\mathbb{Z}_2$ の 16 特異点ブローアップで構成される．4 次元の ｛（自己双対 3 個）＋（反自己双対 3 個)｝ に加えて 16 個の特異点のブローアップに伴う 16 個のパラメータが存在する．こうしてパラメータ空間として $O(3,19)$ があらわれる ($K3$ の交点形式の符号で決まっている)．これを 3, 19 をわける格子の基底のとり方で $O(3,19,\mathbb{Z})$ であることと，自己双対，反自己双対それぞれの回転 $O(3)$, $O(9)$ でわる必要がある．それと $K3$ の体積のパラメータを $\mathbb{R}^+$ とすると，結局アインシュタイン計量のモジュライ空間は

$$\frac{O(3,19)}{O(3,19,\mathbb{Z})O(3)O(9)} \times \mathbb{R}^+ \tag{3.108}$$

となる．次に $dB=0$ を満たす 2 階の反対称テンソルについて考慮する．$b_2(\mathrm{K3})=22$ パラメータを加えると

$$\mathcal{M}_{\mathrm{TypeIIA}onK3}=\frac{O(3,19)}{O(3,19,\mathbb{Z})O(3)O(9)}\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^{22}$$
$$\sim\frac{O(4,20)}{O(4)O(20)}$$

ただし，最後の行は離散的な群については省略している．こうして $K3$ 上の TypeIIA 理論のモジュライ空間が決まる．

（2） ヘテロ弦 T^4 上のモジュライ

次にヘテロ弦について考える．ヘテロはもともと左向きは 26 次元のボゾニックな弦のうち 16 次元をトーラスコンパクト化した弦理論であった．左はさらに 4 次元トーラスにコンパクト化するので，トータルで (4 + 16) 次元をトーラスにコンパクト化している．一方，右向きは 4 次元分コンパクト化するからモジュライ空間は

$$\mathcal{M}_{\text{ヘテロ}\ T^4}=\frac{O(4,20)}{O(4)O(20)} \tag{3.109}$$

したがって両者のモジュライ空間は等しい．つまり共形場の理論としての区別がないと言っていいのである．非常に大雑把であるがこのような議論で二つの弦理論がある局面で区別がつかなくなり，理論の張り合わせすなわちデュアリティーが存在することが示唆されるのである．ヴァッファ-ウィッテン理論による分配関数の双対性はその証拠の一つなのである．

本来ならば，さらに様々な弦理論の双対性や位相的弦理論などについても紹介した方がいいのであろうが，長くなるので位相的場の理論に関しては一旦ここでやめることにする．

第 4 章 非可換空間上の場の理論

この章からは非可換空間上の場の理論について考察することにする．非可換空間というのは，変形量子化された空間あるいはコンヌ達が発展させた非可換幾何の意味での空間のことである．といってもこの章では基本的にユークリッド空間を変形量子化することで非可換時空にした空間を主に扱う．数学者は，「非可換幾何」を扱うとは，位相的場の理論の章で扱った幾何とは随分異なる分野に変わってしまうと考えるかもしれない．しかし，これも弦理論や前章に現れたD-ブレーンを考慮すると必然的に考慮しなければならない空間であることがわかる．それどころか，可換な空間と見方を変えただけの等価な理論として非可換空間上の理論が現れたり，より時空の本質的な性質として非可換性が現れることがわかってきている．

4.1 非可換空間へのイントロ

近年の非可換幾何への物理学者の関心の高まりは，時空自身の非可換性が見えていることが理由である．しかし時空と運動量やエネルギーとの非可換性は，量子力学の誕生した前世紀初頭にまでさかのぼる．そこから復習することで温故知新とし，弦理論と組み合わされることで時空の不確定性が導かれる．

4.1.1 量子力学と時空の不確定性関係

量子力学での交換関係はプランク定数を $\hbar$ として

$$[\hat{p}_\mu, \hat{x}^\nu] = i\hbar\delta_\mu^\nu \tag{4.1}$$

であった．つまり相空間（空間と運動量空間で作られる空間）が非可換空間である．相空間では「点」が「プランクスケールのセル」にぼやけている．最小体積がプランク定数で決められているからだ．別の言い方をすると，上の交換関係から観測される位置と運動量に不確定性関係が導かれる．つまり，

$$\Delta x^\mu \Delta p_\nu \geq \frac{1}{2}\hbar\delta_\nu^\mu \tag{4.2}$$

ただし，$\Delta x = \sqrt{\langle(x - \langle x\rangle)^2\rangle}$ である．

ここで不確定性関係を証明しておこう．シュヴァルツの不等式より $(\Delta x)^2(\Delta p)^2 \geq |(x - \langle x\rangle)(p - \langle p\rangle)|^2$ となる．ただし $|f|^2$ は期待値の 2 乗とした．ここで $a = (x - \langle x\rangle), b = (p - \langle p\rangle)$ とすると，$ab = (ab - ba)/2 + (ab + ba)/2$ で a, b はエルミートであることに注意し

$$\begin{aligned}(\Delta x)^2(\Delta p)^2 &\geq |ab - ba|^2/4 + |ab + ba|^2/4 \\ &\geq |ab - ba|^2/4 = \frac{1}{4}|[\hat{p}_\mu, \hat{x}^\nu]|^2\end{aligned}$$

と証明される．

この章の以下の部分ではこうした非可換性を空間だけについても要請する．つまり，$\hat{x}^\mu$ は空間座標を演算子としたものとして

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu} \tag{4.3}$$

とするのである．ここで θ は $\theta^{\mu\nu} = -\theta^{\nu\mu}$ である反対称実 $D \times D$ 行列である．D は空間の次元であるとした．先ほど相空間の非可換性から運動量と空間座標の不確定関係が得られたのと同様に，空間の不確定性関係が

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu \geq \frac{1}{2}|\theta^{\mu\nu}| \tag{4.4}$$

と得られる．

時空の非可換性があると，時空の非可換パラメータ以上の近距離の概念が不確定性関係より存在しない．この性質により 20 世紀前半には紫外発散（運動量無限大による発散）のカットオフとしての役割が期待された．つまり，運動量の無限大が原因の発散は，裏を返せば 2 粒子がいくらでも近距離になれることが原因であるとも言える．しかし，非可換空間で一定以上の近距離が存在しないと，それに応じて運動量の上限が存在することになる．それによって理論が紫外発散（UV 発散）に対して正則になっていることが期待されるからである．しかし紫外発散を取り除く手法として「繰り込み」が登場し非常に大きな成功を収めたことで，時空の非可換性は物理のなかでしばし忘れられた理論となった．しかし弦理論との結びつきの中でリバイバルすることになる．次に米谷によって導入された時空の非可換性と量子力学の不確定性の関係を見てみよう [37]．

弦理論と時空不確定性関係

弦理論には弦の長さのスケールが入るので，それを l_s で表すことにする．高エネルギーで弦理論に知られた関係に $x^\mu \propto l_s^2 p^\mu$ がある．量子力学の不確定性関係 (4.2) とあわせると

$$\Delta x \Delta p \gtrsim \frac{\hbar}{2}(1 + l_s^2(\Delta p)^2) \tag{4.5}$$

となる．よって $\Delta x \gtrsim l_s \hbar$ が言えるので，時空の不確定性

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu \gtrsim (l_s \hbar)^2 \tag{4.6}$$

が出てくる．言い換えると，時空が非可換であることが示唆されるのである．量子力学と弦理論が正しいとするなら，時空の非可換性は必然的な帰結であるということだ．これは相空間の非可換性とは物理的には全く異なる現象である．数学的にはどちらの空間も単に非可換な空間で違いを意識する必要がないと思うかもしれない．しかし「空間」は本来「非可換」であり，その可換極限として我々が感じる多様体としての「空間」が存在するということであるなら,「空間」の概念が一般化されて多様体の概念の種となったことを考えると,「空間」の定義や概念あるいは哲学に少なからず影響を与えるものである．

4.1.2　弦理論と非可換性

この節では弦理論と非可換性についていくつかの重要なトピックスの概要を紹介する．

行列模型

弦理論にしろ D-ブレーンの理論にしろ，その生成消滅を含めて表すことができる理論で様々な予言能力がある理論は完成していない．しかしいくつかの候補は存在している．D-ブレーンの作用や，弦理論の構成的定義とされる IIB 行列模型は力学変数が無限次元の行列で表される理論であるが，これはそういった候補の一つである[1)]．

行列模型の場合 D-ブレーンや弦を自由度に含む行列自体が空間も生成しているため，本質的に非可換の理論である．したがって，行列模型は従来のような多様体的な空間の概念から著しく逸脱しているが，計算結果として弦であったり重力を含む場の理論を再現していたりという状況証拠はそろいつつある．さらに時空が 4 次元であることの説明ができるかもしれないなど，今後に期待が持てる．コンヌ (A. Connes)，ダグラス (M. Douglas)，シュワルツ (A. Schwartz) は非可換トーラス上にコンパクト化した IIB 行列模型が非可換ヤン-ミルズ理論になることを示し，また M 理論の行列模型的表現と目されてきた BFSS 理論との関係を示した．これは 98 年以降弦理論の研究者が非可換に注目するきっかけを与えた．

サイバーグ-ウィッテン写像

サイバーグ-ウィッテンは，背景場がある D-ブレーンの有効理論が非可換ゲージ理論になることを示した．つまりある「背景場のある可換な空間上のゲージ理論」と「非可換空間上のゲージ理論」が等価であると主張したのだ [38]．$\alpha' = l_s^2$ として，世間面が Σ の開弦の作用は以下で与えられる．

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\sigma \left(g_{\mu\nu} \partial_\alpha x^\mu \partial_\alpha x^\nu - 2\pi i \alpha' B_{\mu\nu} \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \right) \tag{4.7}$$

---

1) 石橋延幸，川合光，北澤良久，土屋麻人によって作られたので IKKT 行列模型とも呼ばれる．

リーマン計量 $g_{\mu\nu}$ の他に，(NS − NS)2 形式場[2)] B の背景場が存在するとして考える．サイバーグ-ウィッテン極限と呼ばれる $\alpha' \sim \varepsilon^{\frac{1}{2}} \to 0$, $g_{\mu\nu} \sim \varepsilon \to 0$ という極限では，全微分で書ける項だけ見て境界積分に直すと

$$S_{\partial\Sigma} = -\frac{i}{2}\int_{\partial\Sigma} B_{\mu\nu} x^{\mu} \partial_{\tau} x^{\nu} \tag{4.8}$$

と書ける部分が重要な項になる．D-ブレーンの自由度だけ残る極限をとって D-ブレーン上の有効理論を考えたことに対応する．ただし τ は $\partial\Sigma$ すなわち D-ブレーンに沿った座標とした．さらにこれを時間方向の座標であるとする．

共役運動量は定義から $p_{\mu} = B_{\mu\nu} x^{\nu}$ と求まる．正準交換関係を量子化して $[p_{\mu}, x_{\nu}] = i\hbar\delta_{\mu\nu}$ であったことを思い出すと，B の逆行列を用いて

$$[x^{\mu}, x^{\nu}] = i\hbar(B^{-1})^{\mu\nu} \tag{4.9}$$

と与えられる．つまり，空間が非可換になっていると理解できる[3)]．もちろん，単に背景場のある可換な空間の理論とみなしてもいいので，一つの理論が二つの記述方法で書かれることになる．さらに前章で見たように，D-ブレーンの有効理論は 10 次元ゲージ理論の次元リダクションでも構成される．したがって，この二つの記述方法に対応して,「非可換空間上のゲージ理論」と「背景 B 場付きの可換空間上のゲージ理論」で同じ理論が記述できるのである．

実際にこの二つの記述を結びつける変換を具体的に構成することができるだろうか？　これはゲージ変換の可換性を要求することで得られる．非可換空間のゲージ場とゲージ変換のパラメータを $\hat{A}, \hat{\phi}$, 可換空間のゲージ場を A，ゲージパラメータを ϕ で表すことにする．$\hat{A}$ を A から作用素への写像と考え $\hat{A}(A)$ と書くとして，非可換空間と可換空間でのゲージ変換の可換図式から

$$\hat{A}(A) + \delta_{\hat{\phi}}\hat{A} = \hat{A}(A + \delta_{\phi}A) \tag{4.10}$$

という等式が要求される．つまり非可換空間におけるゲージ変換が，可換空間で

[2)] (NS − NS) や (R-R) などの言葉が弦理論の教科書や論文に出てくるが，閉弦の周期境界条件の付け方の違いを表している．

[3)] ここでは，簡単のため非常に大雑把な評価をしているが，原論文の中ではより正確な評価がなされていることに注意．

ゲージ変換したものを非可換空間へ写像したもので実現されるという式である．

非可換空間のゲージ変換の定義は後で詳細を述べるが，この式から「可換空間上のゲージ理論」と，それと等価な「非可換空間上のゲージ理論」との変換公式が実際に得られる．それをサイバーグ-ウィッテン写像と呼んでいる．重要なことは，空間が可換であるか非可換であるかというのは見方の問題であり，同じ理論と見ることができる場合があるということである．

弦の場の理論

弦理論と非可換性の関係で重要なトピックスとして，最後に弦の場の理論をあげておく．弦の生成，消滅などの現象を記述できる理論にするために弦理論は本来場の理論として定式化される必要がある．弦の場の理論の記述には非可換幾何学の概念が用いられるのである．現在のところ弦の場の理論は発展途上の理論であり，本書では扱わない．

4.2 非可換空間で用いられる道具

この節ではこの本で扱う非可換空間の大部分を占める非可換ユークリッド空間上の場の理論を議論するために必要な道具をそろえることにする．

非可換座標とフォック空間

非可換空間では座標は作用素で置き換えられ，例えばその交換関係は

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu} \tag{4.11}$$

のように与えられる．ここで，反対称行列 $\theta^{\mu\nu} = -\theta^{\nu\mu}$ は非可換パラメータと呼ばれる．この章では,「ˆ」は作用素を表すためにつけている．

以下で扱うのは非可換ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{2d}_\theta$ である．非可換パラメータとして定数のものを選ぶことができる．そのため，適当な組み換えで調和振動子の量子化で現れた生成消滅演算子を用いて表すことができる（1.3.1 節を参照）．

フォック空間形式

座標変換で (4.11) を "$[\hat{x}^{2\alpha-1}, x^{2\alpha}] = i\theta^{2\alpha-1,2\alpha}$ $(\alpha=1,\cdots,d)$, (他の交換関係)= 0" とでき，複素座標 $\hat{z}_\alpha$ を用いて生成，消滅作用素を導入できる．

$$a_\alpha \equiv \frac{\hat{z}_\alpha}{\sqrt{\theta^{2\alpha-1,2\alpha}}}, \qquad \hat{z}_\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}^{2\alpha-1} + i\hat{x}^{2\alpha})$$

$$a_\alpha^\dagger \equiv \frac{\hat{\bar{z}}_\alpha}{\sqrt{\theta^{2\alpha-1,2\alpha}}}, \qquad \hat{\bar{z}}_\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}^{2\alpha-1} - i\hat{x}^{2\alpha})$$

$$[a_\alpha, a_\beta^\dagger] = \delta^{\alpha\beta} \qquad (\alpha,\beta = 1,\cdots,d)$$

$a_\alpha^\dagger$ が生成演算子で a_α は消滅演算子である．調和振動子の場合同様にフォック空間 $\mathcal{H}$ に作用するとする．

フォック空間に関してここでもまとめると，個数演算子 $\hat{n}_\alpha$ の固有ベクトルで展開されるヒルベルト空間の基底の組であり

$$\mathcal{H} = \oplus \mathbb{C} |n_1,\cdots,n_d\rangle$$

$$|n_1,\cdots,n_d\rangle \equiv \frac{(a_1^\dagger)^{n_1}\cdots(a_d^\dagger)^{n_d}}{\sqrt{n_1!\cdots n_d!}} |0,\cdots,0\rangle$$

$$a_\alpha |n_1,\cdots,n_d\rangle = \sqrt{n_\alpha}\, |n_1,\cdots,n_\alpha - 1,\cdots,n_d\rangle$$

$$a_\alpha^\dagger |n_1,\cdots,n_d\rangle = \sqrt{n_\alpha + 1}\, |n_1,\cdots,n_\alpha + 1,\cdots,n_d\rangle$$

である．ここで**個数演算子**は $\hat{n}_\alpha \equiv a_\alpha^\dagger a_\alpha$ で定義されていたことを思い出そう．

一般に任意の作用素はフォック空間の基底を用いて

$$\hat{\mathcal{O}} = \sum_{n_1,m_1} \cdots \sum_{n_d,m_d} \mathcal{O}^{n_1\cdots n_d}_{m_1\cdots m_d} |n_1,\cdots,n_d\rangle\langle m_1,\cdots,m_d|$$

と表すことができる．

非可換空間上の微分と積分

微分積分を作用素の言葉で書き直すことにする．微分は

$$\partial_\mu \hat{f}(\hat{x}) = [\hat{\partial}_\mu, \hat{f}(\hat{x})] = -i\theta_{\mu\nu}[\hat{x}^\nu, \hat{f}(\hat{x})]$$

と書くことができる．ここで添字が下付の θ は上付きの θ の逆行列を表す，すな

わち $\theta_{\mu\nu}\theta^{\nu\rho}=\delta_{\mu}^{\rho}$ である．

次に積分はヒルベルト空間のトレースで

$$\int d^D x f(x) \Longleftrightarrow (2\pi)^D \det(\theta)^{1/2} \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \hat{f}$$

と与えられる．

4.2.1 モヤル積 (J. Moyal)

今まで見てきたように非可換では作用素で理論が構成された．しかし関数同士の積を非可換な積で置き換えることで関数による同等な理論が構成できることが知られている．一般に変形量子化の問題として，フェドソフ (B.V. Fedosov) 等によって一般論が与えられているが，ここでは非可換ユークリッド空間に限定して話を進める．より詳しいことは [36] などを参照されたし．ここでは簡単な非可換ユークリッド空間の場合のそれを見てみる．

ワイル順序

フーリエ変換

$$f(x)=\int \frac{d^D k}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \tilde{f}(k) e^{ik_\mu x^\mu} \tag{4.12}$$

を用いて，c 数関数 $f(x)$ から作用素 $\hat{f}_W(\hat{x})$ への変換であるワイル変換を以下のように定義する．

$$\hat{f}_W(\hat{x})=\int \frac{d^D k}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \tilde{f}(k) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} \tag{4.13}$$

ここで $\hat{x}$ は作用素である．つまり非可換な作用素の順序を指数関数の形にまとまるような順序に固定したことになる．このように非可換座標を指数関数の形にまとめた順序にしたもの，$\hat{f}_W(\hat{x})$ をワイル順序と呼ぶ．順序のとり方はこれに限らない．例えば場の理論での作用素形式では通常「正規順序 (normal order)」という消滅演算子はまとめて寄せるというような順序をしばしば用いる．しかし一度順序のとり方を固定すると，どのとり方を用いるかは本質的な役割を果たさない．この変換の逆変換を Ω_W で表す．

$$\Omega_W(\hat{f}_W(\hat{x}))=f(x). \tag{4.14}$$

モヤル積（スター積）

二つの作用素 $\hat{f}(\hat{x})$, $\hat{g}(\hat{x})$ の積をワイル順序に直すと

$$\begin{aligned}\hat{f}(\hat{x})\hat{g}(\hat{x})&=\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}}\frac{d^Dk'}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}}\tilde{f}(k)\tilde{g}(k')e^{ik\cdot\hat{x}}e^{ik'\cdot\hat{x}}\\&=\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}}\frac{d^Dk'}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}}\tilde{f}(k)\tilde{g}(k')e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}k_\mu k'_\nu}e^{i(k+k')\cdot\hat{x}}\end{aligned}$$

となる．ここで $[A,[A,B]]=[B,[A,B]]=0$ のときのキャンベル-ハウスドルフの公式 (J. Campbell, F. Hausdorff) $e^Ae^B=e^{A+B}e^{[A,B]/2}$ と交換関係 (4.11) を用いた．これから，この積の逆ワイル変換 $\Omega_W(\hat{f}(\hat{x})\hat{g}(\hat{x}))$ は

$$\begin{aligned}\Omega_W(\hat{f}(\hat{x})\hat{g}(\hat{x}))&=\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}}\frac{d^Dl}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}}\tilde{f}(k)\tilde{g}(l)e^{-\frac{i}{2}k_\mu\theta^{\mu\nu}l_\nu}e^{i(k+l)\cdot x}\\&=f(x)\exp\left(\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial}_\mu\theta^{\mu\nu}\overrightarrow{\partial}_\nu\right)g(x)\end{aligned} \tag{4.15}$$

で与えられる．ただし $\overleftarrow{\partial}_\mu$ は左側にある関数 $f(x)$ に対する微分作用素で，$\overrightarrow{\partial}_\nu$ は右側にある関数 $g(x)$ に対する微分作用素である．

以下ではモヤル積（またはスター積）と呼ばれるこの積を*積と書くことにして以下の定義とする．

$$\begin{aligned}f(x)*g(x)&=f(x)\exp\left(\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial}_\mu\theta^{\mu\nu}\overrightarrow{\partial}_\nu\right)g(x)\\&=f(x)g(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f(x)\left(\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial}_\mu\theta^{\mu\nu}\overrightarrow{\partial}_\nu\right)^n g(x)\end{aligned}$$

この $*$ 積は変形量子化の要請である結合則 $A*(B*C)=(A*B)*C$ を満たし，さらに非可換パラメータ θ の 1 次の積はヤコビ律を満たすポアッソン括弧になっている．この非可換な積を導入すると，作用素を用いることなく非可換空間の理論を展開することができる．つまり全ての関数の積を $*$ で形式的に置きかえることで，非可換ユークリッド空間の理論になるのだ．可換極限 $\theta\to0$ で, 通常の積 $f(x)*g(x)\to f(x)g(x)$ にもどることにも注意されたし．

4.3 非可換 (noncommutative) ヤン-ミルズ理論

以下では非可換空間上の場の理論のいくつかの応用について見ていくことにする．最初は位相的場の理論の章でも最も重要であったゲージ理論について勉強し，特にその理論のなかで BPS 状態であるインスタントンを非可換空間上でも構成してみる．

$U(N)$ ヤン-ミルズ理論

非可換空間上のベクトル束を定義しそれに接続を導入する方法はすこし面倒なので，手早く接続を導入するために，基本表現のゲージ変換を受ける物質場 $\hat{\phi}$ を用い，微分が共変に振る舞うようにゲージ場を導入することにする．つまり $\hat{\phi}$ がゲージ変換 $\hat{g}\hat{\phi}$ を受けるとき $\partial_\mu\hat{\phi}$ が共変に振る舞わないので，その補正としてゲージ場 A_μ を導入し共変微分を構成する．共変微分を

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \hat{A}_\mu \tag{4.16}$$

と書くことにする[4]．基本表現タイプの物質場 $\hat{\phi}$ に対する共変微分 (4.16) は

$$\widehat{\nabla}_\mu\hat{\phi} = [\hat{\partial}_\mu, \hat{\phi}] + \hat{A}_\mu\hat{\phi} = -\hat{\phi}\hat{\partial}_\mu + (\hat{\partial}_\mu + \hat{A}_\mu)\hat{\phi} \tag{4.17}$$

と書くことができる．微分は $[\hat{\partial}_\mu, *] = -i\theta_{\mu\nu}[\hat{x}^\nu, *]$ であった．左作用と右作用に分けることで新しく共変微分演算子 $\hat{D}$ を以下のように定義する．

$$\hat{D}_\mu = \hat{\partial}_\mu + \hat{A}_\mu$$

これは反エルミートな作用素である．ゲージ変換に対して共変に変換することも重要だ．

$$\hat{D}_\mu \longrightarrow \hat{g}\hat{D}_\mu\hat{g}^\dagger$$

ゲージ曲率も通常の可換の場合と同様に定義でき

$$\hat{F}_{\mu\nu} = [\widehat{\nabla}_\mu, \widehat{\nabla}_\nu] = i\theta_{\mu\nu} + [\hat{D}_\mu, \hat{D}_\nu] \tag{4.18}$$

である．ここで定数 $\theta_{\mu\nu}$ が現れることは重要である．この定数部分のために非可

---

[4] 他の章とは異なり，ゲージ場が反エルミートに定義されていることに注意が必要だ．

換に特徴的な現象が現れる．ヤン-ミルズ理論の作用も可換の場合と同様に

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{YM}}&=-\frac{(2\pi)^d\sqrt{\det\theta^{\mu\nu}}}{4g^2}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\mathrm{tr}_{U(N)}\hat{F}_{\mu\nu}^2\\&=-\frac{(2\pi)^d\sqrt{\det\theta^{\mu\nu}}}{4g^2}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\mathrm{tr}_{U(N)}\left([\hat{D}_\mu,\hat{D}_\nu]+i\theta_{\mu\nu}\right)^2\end{aligned}$$

とすることでゲージ変換に不変なスカラー量として作用が得られる．ただし g はヤン-ミルズ結合定数を表している．また空間積分がトレース $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}$ に置き換えられている．

4.3.1 非可換 $\mathbb{R}^4$ 上のインスタントン

インスタントンとインスタントン数

$\mathbb{R}^4$ 上の $U(N)$ ヤン-ミルズ理論の特にインスタントンについて簡単にまとめ，次の節から非可換 $\mathbb{R}^4$ 上のヤン-ミルズ理論を見ていく．

可換な場合

ヤン-ミルズ作用は

$$S=-\frac{1}{2g^2}\int\mathrm{tr}_{U(N)}F\wedge *F$$

であり，作用の極小値を与えるのがインスタントンであった．この $*$ はホッジ双対を表しモヤル積ではない．この章ではホッジ双対とモヤル積ともに $*$ で表されるが，文脈で判別がつくので間違えることはないだろう．以下では特に反自己双対接続のインスタントンについてのみ考える．

インスタントン方程式（反自己双対方程式 (ASD)）

$$F_{\mu\nu}^{+}=0 \tag{4.19}$$

この方程式の解がインスタントンである．インスタントン（反自己双対ゲージ場）はヤン-ミルズ作用を最小にする，すなわち

$$\int\mathrm{tr}_{U(N)}F\wedge *F=8\pi^2|k|$$

この k が可換空間で**インスタントン数**と呼ばれるものである．

インスタントン数

可換空間では，インスタントンはインスタントン数 (instanton number) と呼ばれるトポロジカルチャージ（第 1 ポントリャーギン類) で分類される．

$$
\begin{aligned}
Q &= -\frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}_{U(N)} F\wedge F \\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\int \mathrm{tr}_{U(N)}(F_{z_1\bar{z}_1}F_{z_2\bar{z}_2}-F_{z_1\bar{z}_2}F_{z_2\bar{z}_1})
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

ここで複素表示を用いたが，定義は 4.4 節を参照せよ．また 2 行目ではインスタントン（反自己双対）であるという性質を用いた．これは可換空間では整数値 $Q=k$ をとる．

非可換時空の場合

では非可換空間上のインスタントンはどうであろうか？　自己双対の定義は変わらず，作用素に置き換えたものが非可換空間のインスタントンだ．

$$
\hat{F}^{+}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(\hat{F}+*\hat{F})_{\mu\nu}=0
$$

インスタントン数を作用素の言葉で素朴に表すと

$$
Q=\sqrt{\det\theta^{\alpha\bar{\beta}}}\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\mathrm{tr}_{U(N)}(F_{z_1\bar{z}_1}F_{z_2\bar{z}_2}-F_{z_1\bar{z}_2}F_{z_2\bar{z}_1})
$$

となる．これが整数値をとるかどうかは非自明な問題である．結論から言うとこの素朴な記述は厳密には正しく定義されていない．

以下では非可換空間でのインスタントンとは何か，どのように構成するか，インスタントン数の整数値性はどのように証明されるかについて見ていこう．

4.3.2　非可換 $\mathbb{R}^4$ 上の ADHM 構成法

この節ではインスタントン解を具体的に構成することで実際のインスタントンの性質について考察する．非可換 $\mathbb{R}^4$ 上のインスタントン方程式を解くには ADHM 構成法で行うのが便利である．非可換 $\mathbb{R}^4$ での ADHM 構成は可換 $\mathbb{R}^4$ で

の ADHM 構成法と同様に構成できる．そこで可換 $\mathbb{R}^4$ 上の ADHM 構成法によるインスタントンの構成を最小限で復習してから非可換 $\mathbb{R}^4$ 上の ADHM 構成に拡張し，インスタントンを実際に構成する．特徴的なのは非可換 $\mathbb{R}^4$ 上では $U(1)$ ゲージ理論にもインスタントンが存在することに見られる．

可換な $\mathbb{R}^4$ 上での ADHM 構成

インスタントン数 k を持つ $U(N)$ ゲージ場のインスタントンの構成を ADHM 構成で実行してみよう．短く解説するために天下り式に解説するので，より詳しい解説は例えば [42] などを参照されたい．

1. 複素ベクトル空間 $V=\mathbb{C}^k$, $W=\mathbb{C}^N$ のペアを用意する．
2. B_1, $B_2\in\mathrm{Hom}(V,V)$, $I\in\mathrm{Hom}(W,V)$ $J\in\mathrm{Hom}(V,W)$ を導入する．

$$B_1=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\ \vdots\\ k\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1&2&\cdots&k\end{array}\\ \begin{pmatrix}B^1_{11}&B^1_{12}&\cdots&B^1_{1k}\\B^1_{21}&B^1_{22}&\cdots&B^1_{2k}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\B^1_{k1}&B^1_{k2}&\cdots&B^1_{kk}\end{pmatrix}\end{array},\qquad B_2=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\ \vdots\\ k\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1&2&\cdots&k\end{array}\\ \begin{pmatrix}B^2_{11}&B^2_{12}&\cdots&B^2_{1k}\\B^2_{21}&B^2_{22}&\cdots&B^2_{2k}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\B^2_{k1}&B^2_{k2}&\cdots&B^2_{kk}\end{pmatrix}\end{array}$$

$$I=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\ \vdots\\ k\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}1&\cdots&N\end{array}\\ \begin{pmatrix}I_{11}&\cdots&I_{1N}\\I_{21}&\cdots&I_{2N}\\\vdots&\ddots&\vdots\\I_{k1}&\cdots&I_{kN}\end{pmatrix}\end{array},\qquad J=\begin{array}{c} \\ 1\\ \vdots\\ N\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1&2&\cdots&k\end{array}\\ \begin{pmatrix}J_{11}&J_{12}&\cdots&J_{1k}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\J_{N1}&J_{N2}&\cdots&J_{Nk}\end{pmatrix}\end{array} \tag{4.21}$$

3. 以下で与えられる ADHM 方程式を解く．

$$\mu_{\mathbf{R}}=0 \qquad (\text{実 ADHM 方程式})$$

$$\mu_{\mathbf{C}}=0 \qquad (\text{複素 ADHM 方程式})$$

ここで運動量写像である μ は以下で与えられる．

$$\mu_{\mathbf{R}}\equiv[B_1,B_1^\dagger]+[B_2,B_2^\dagger]+II^\dagger-J^\dagger J$$

$$\mu_{\mathbf{C}} \equiv [B_1, B_2] + IJ$$

ハイパーケーラー商としてモジュライ空間が構成されるために運動量写像 μ という言葉を用いているが，そういった議論は [39] に詳細があるのでここでは議論しない．

4.　「ディラック作用素的作用素」$\mathcal{D}^\dagger$ を以下のように導入する（ただし † はエルミート共役つまり複素共役を転置しているものとする）．

$\mathcal{D}^\dagger : V \oplus V \oplus W \to V \oplus V$ なる線形作用素を

$$\mathcal{D}^\dagger = \begin{pmatrix} \tau_z \\ \sigma_z^\dagger \end{pmatrix}$$

$$\tau_z = \bigl(B_2 - z_2,\ B_1 - z_1,\ I\bigr), \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} -B_1 + z_1 \\ B_2 - z_2 \\ J \end{pmatrix}$$

で定義する．z_i は $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ としたときの複素座標である.「ディラック作用素的作用素」と呼んではいるが単なる有限サイズの行列で書かれていることに注意されたし．具体的に行列のサイズを明示すると $2k \times (2k+N)$ 行列である．ここで現れた τ, σ を用いると，ADHM 方程式は以下の因子化条件と等価であることがわかる．

$$\tau_z \tau_z^\dagger = \sigma_z^\dagger \sigma_z \equiv \Box, \qquad \tau_z \sigma_z = 0 \tag{4.22}$$

$\tau_z \tau_z^\dagger$（または $\sigma_z^\dagger \sigma_z$）は後で使うので □ という記号で書くことにする．

5.　次にディラック作用素的作用素 $\mathcal{D}^\dagger$ の N 個のゼロモードを探す．

$$\mathcal{D}^\dagger \Psi^{(a)} = 0 \qquad (a = 1, \cdots, N)$$

$$\Psi = (\Psi^{(1)} \cdots \Psi^{(N)}) : W \longrightarrow V \oplus V \oplus W$$

$\Psi^{(a)}$ は $2k+N$ 成分ベクトルである．$\Psi^{(a)}$ に直交規格化条件を課す．

$$\Psi^{(a)\dagger} \Psi^{(b)} = \delta^{ab}$$

したがって $\Psi^{(a)}$ は $\mathrm{Ker}\mathcal{D}^\dagger$ の正規直交基底である．

6.　上で得たゼロモードを用いてようやくインスタントン (反自己双対ゲージ

場）を構成する．

$$A^{ab}_\mu = \Psi^{(a)\dagger}\partial_\mu \Psi^{(b)} \tag{4.23}$$

a, b は $U(N)$ ゲージ群の添字である．

天下り式に構成方法を箇条書きしたので，ADHM 構成法になじみのない読者は戸惑うかもしれないが，この A^{ab}_μ がインスタントンであることは直接インスタントン方程式 (4.19) に代入することで確かめられる．また逆にインスタントンならば必ず ADHM 構成法で構成できることも確かめられる．

後で使う関係式をここでまとめておく．

$\Psi = (\Psi^{(1)} \cdots \Psi^{(N)})$ の $(2k+N)\times N$ 行列を用いて次のような演算子を導入する．

$$\Psi\Psi^\dagger = 1 - \mathcal{D}\frac{1}{\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}}\mathcal{D}^\dagger \tag{4.24}$$

$\Psi\Psi^\dagger$ や $\mathcal{D}\dfrac{1}{\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}}\mathcal{D}^\dagger$ は射影演算子であり後でよく使われる．

$\Psi\Psi^\dagger$ は $\mathrm{Ker}\mathcal{D}^\dagger$ への射影演算子であり，τ と σ を使うと以下のように表される．

$$\mathcal{D}^\dagger D = \begin{pmatrix} \Box & 0 \\ 0 & \Box \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{D}\frac{1}{\mathcal{D}^\dagger D}\mathcal{D}^\dagger = \tau^\dagger\frac{1}{\Box}\tau + \sigma\frac{1}{\Box}\sigma^\dagger \tag{4.25}$$

非可換 $\mathbb{R}^4$ 上の ADHM 構成

4 次元非可換ユークリッド空間の交換関係 (4.11) の非可換パラメータを $\theta^{12} = -\theta^{21} = -\zeta_1, \theta^{34} = -\theta^{43} = -\zeta_2$, その他の成分を 0 として議論することにする．座標の選び方で常にこのようにとれるので一般性は失っていない．複素座標に組むと非可換性は

$$[\hat{z}_1, \hat{z}_2] = 0, \qquad [\hat{z}_1, \hat{\bar{z}}_1] + [\hat{z}_2, \hat{\bar{z}}_2] = -(\zeta_1 + \zeta_2) \equiv -\zeta_r$$

で与えられる．因子化条件 (4.22) が成立するとゲージ場がインスタントンになっていたので，非可換の場合も因子化条件が満たされるように ADHM 方程式が変更されるとよい．それは単に $\mu_{\mathbf{R}}$ を 0 ではなく ζ_r と変更するだけで満たされる．

$$\mu_{\mathbf{R}} = [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J = \zeta_r \mathbf{1}_k \tag{4.26}$$

$$\mu_{\mathbf{C}}=[B_1,B_2]+IJ=0$$

ただし $\mathbf{1}_k$ は $k\times k$ 単位行列を表す．この変形がインスタントンモジュライ空間 $\mathcal{M}_{k,N}$ を非特異にし，このモジュライ空間はなめらかな $4kN$ 次元ハイパーケーラー多様体で与えられることが知られている [39].

$$\mathcal{M}^{\zeta}_{k,N}=\mu_{\mathbf{R}}^{-1}(\zeta_r\mathbf{1}_k)\cap\mu_{\mathbf{C}}^{-1}(0)/U(k)$$

ADHM 方程式は (4.26) に変更されたが，その他の手続きは可換な $\mathbb{R}^4$ の ADHM 構成と全く変わらず，インスタントンのゲージ場とそれを用いて作られる共変微分作用素は

$$\hat{A}_\mu=\psi^\dagger\partial_\mu\psi,\qquad \hat{D}_\mu=-i\Psi^\dagger\theta_{\mu\nu}\hat{x}^\nu\Psi \tag{4.27}$$

と与えればよいことがわかる．この構成法を用いてネクラソフとシュワルツが非可換 $\mathbb{R}^4$ 上のインスタントンを実際に構成してみせた．

4.3.3 ネクラソフ-シュワルツ $U(1)$ インスタントン

非可換に変形したことで得られる特徴的な事実のひとつは，$U(1)$ インスタントンが存在することである．$U(1)$ マルチインスタントン（任意のインスタントン数の多重インスタントン）を実際に構成し，その解析からいろいろな性質を明らかにしていこう．

まず $U(1)$ の場合は ADHM 構成法によるゲージ場がさらに具体的に書き下せるので，それを学んでみる．B_1,B_2,I,J は変形 ADHM 方程式 (4.26) を満たすとする．$\zeta_r>0$ で $U(1)$ の場合はいつでも $J=0$ とできることが知られているので，その事実を使うことにする．B_1 B_2 は $k\times k$, I は $k\times 1$ 行列で

$$B_1=\begin{array}{c} 1\\ \vdots\\ k\end{array}\overset{\begin{array}{ccc}1&\cdots&k\end{array}}{\begin{pmatrix}B^1_{11}&\cdots&B^1_{1k}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ B^1_{k1}&\cdots&B^1_{kk}\end{pmatrix}},\qquad B_2=\begin{array}{c} 1\\ \vdots\\ k\end{array}\overset{\begin{array}{ccc}1&\cdots&k\end{array}}{\begin{pmatrix}B^2_{11}&\cdots&B^2_{1k}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ B^2_{k1}&\cdots&B^2_{kk}\end{pmatrix}} \tag{4.28}$$

$$I=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k \end{array}\!\!\begin{array}{c} 1 \\ \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_k \end{pmatrix} \end{array}, \qquad J=0$$

非可換パラメータがいちいち現れるのが邪魔なので B_1 と B_2 を

$$B_\alpha=\sqrt{\zeta_\alpha}\beta_\alpha \qquad (\alpha=1,2)$$

と変数変換し，$\hat{z}_1$, $\hat{\bar{z}}_1$, $\hat{z}_2$, $\hat{\bar{z}}_2$ も同様にスケールしなおし

$$\hat{z}_\alpha=\sqrt{\zeta_\alpha}a_\alpha^\dagger, \qquad \hat{\bar{z}}_\alpha=\sqrt{\zeta_\alpha}a_\alpha, \qquad [a_\alpha,a_\beta^\dagger]=\delta_{\alpha\beta}$$

という変数を用いることにする．a_α ($a_\alpha^\dagger$) は消滅演算子と生成演算子である．いくつかの作用素を定義して，はじめに $U(1)$ インスタントンの形をどこまで一般的に決められるかの答えを見せ，後で理由について述べることにする．$\hat{\Delta}$ を以下のように導入する．

$$\hat{\Delta}=\sum_\alpha \zeta_\alpha(\beta_\alpha-a_\alpha^\dagger)(\beta_\alpha^\dagger-a_\alpha)$$

次に $\hat{\Delta}$ の 0 固有状態への射影演算子を以下のように導入する．

$$P=I^\dagger e^{\sum_\alpha \beta_\alpha^\dagger a_\alpha^\dagger}|0,0\rangle G^{-1}\langle 0,0|e^{\sum_\alpha \beta_\alpha a_\alpha}I$$

ただし G は P が射影演算子になるための規格化因子

$$G=\langle 0,0|e^{\sum_\alpha \beta_\alpha a_\alpha}II^\dagger e^{\sum_\alpha \beta_\alpha^\dagger a_\alpha^\dagger}|0,0\rangle$$

であるとした．定義より射影演算子の性質 $P^2=P$ を満たすことは明らかである．この射影演算子に対してシフト演算子 S を以下の性質を満たすように構成し，また Λ を以下のように定義する．

$$SS^\dagger=1, \qquad S^\dagger S=1-P$$

$$\Lambda=1+I^\dagger\frac{1}{\hat{\Delta}}I \tag{4.29}$$

これを用いると $U(1)$ インスタントンゲージ場が複素座標を用いて，

$$D_{z_\alpha}=-\sqrt{\frac{1}{\zeta_\alpha}}S\Lambda^{-\frac{1}{2}}a_\alpha\Lambda^{\frac{1}{2}}S^\dagger,\qquad D_{\bar{z}_\alpha}=\sqrt{\frac{1}{\zeta_\alpha}}S\Lambda^{\frac{1}{2}}a_\alpha^\dagger\Lambda^{-\frac{1}{2}}S^\dagger \tag{4.30}$$

で与えられる．このことを以下で検証していく．

まず確かめておかなければいけないのは，(4.29) となっていることから，$\hat{\Delta}$ が常に逆を持つかどうかということである．$\hat{\Delta}$ は k **個ゼロモード**を持つことに注意しよう．つまり，

$$e^{\sum_\alpha \beta_\alpha^\dagger a_\alpha^\dagger}|0,0\rangle\otimes e_i \qquad (i=1,\cdots,k)$$

が $\hat{\Delta}e^{\sum_\alpha \beta_\alpha^\dagger a_\alpha^\dagger}|0,0\rangle\otimes e_i=0$ を満たす．ただし $e_i=(\delta_{1i},\delta_{2i},\cdots,\delta_{ki})^t$ で V の基底とした．ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ をこのゼロモード以外の空間に制限すると $\hat{\Delta}$ が逆を持つのでよい．シフト演算子 S がゼロモードを取り除く役割を果たしている．つまり $S\cdots S^\dagger=S(1-P)\cdots S^\dagger$ が成立するので，左から S，右から $S^\dagger$ で挟まれていると射影演算子 P で定義される射影空間（すなわちゼロモードで張られる空間）が除かれる．したがって Λ がシフト演算子で挟まれている上の解 (4.30) にはこの問題が無いことがわかる．

次に (4.30) が $U(1)$ インスタントンであることを ADHM 構成法に沿って確認してみよう．まず「規格化条件 $\Psi^\dagger\Psi=0$ のもと，$\mathcal{D}^\dagger\Psi=0$ をどうやって解いたか」を見てみる．

Ψ を以下のようにおく．

$$\Psi=\begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\\ \xi\end{pmatrix},\qquad \psi_\pm\text{: }k\text{ 成分の作用素からなるベクトル},\qquad \xi\text{: }1\text{ 成分の作用素}$$

規格化条件は

$$\psi_+^\dagger\psi_++\psi_-^\dagger\psi_-+\xi^\dagger\xi=1$$

である．β,a_i を用いて

$$\psi_+=-\sqrt{\zeta_2}(\beta_2^\dagger-a_2)v,\qquad \psi_-=\sqrt{\zeta_1}(\beta_1^\dagger-a_1)v$$

と置き，$\mathcal{D}^\dagger\Psi=0$ に代入すると以下のように解ける．

$$\hat{\Delta}v+I\xi=0, \qquad \hat{\Delta}=\sum_\alpha \zeta_\alpha(\beta_\alpha-a_\alpha^\dagger)(\beta_\alpha^\dagger-a_\alpha) \tag{4.31}$$

また規格化条件は

$$v^\dagger\hat{\Delta}v+\xi^\dagger\xi=1 \tag{4.32}$$

で与える．$\hat{\Delta}$ の 0 固有値状態は

$$e^{\sum_\alpha \beta_\alpha^\dagger a_\alpha^\dagger}|0,0\rangle\otimes e_i \qquad (i=1,\cdots,k) \tag{4.33}$$

であることは容易に確かめられる．ここで e_i は V の基底である．これを取り除くためにプロジェクション

$$P=I^\dagger e^{\sum_\alpha \beta_\alpha^\dagger a_\alpha^\dagger}|0,0\rangle G^{-1}\langle 0,0|e^{\sum_\alpha \beta_\alpha a_\alpha}I, \qquad G=\langle 0,0|e^{\sum_\alpha \beta_\alpha a_\alpha}II^\dagger e^{\sum_\alpha \beta_\alpha^\dagger a_\alpha^\dagger}|0,0\rangle$$

を導入する．P が決まれば，以下のようなシフト演算子 $S,S^\dagger$ が構成できる．

$$SS^\dagger=1, \qquad S^\dagger S=1-P$$

こうして定義されるシフト演算子でシフトされた空間のなかには $\hat{\Delta}$ の 0 固有状態はないから $S^\dagger$ の左と S の右では $\hat{\Delta}$ の逆が定義される．

規格化条件も使うと

$$\xi=\Lambda^{-\frac{1}{2}}S^\dagger, \qquad \Lambda=1+I^\dagger\frac{1}{\hat{\Delta}}I$$

となりこれらを (4.27) に代入すると解が得られる．ここでも複素座標を用いると，例えば

$$\begin{aligned} D_{z_1}&=-\frac{1}{\xi_1}\psi^\dagger\hat{\bar{z}}_1\psi=-\frac{1}{\xi_1}S\Lambda^{-\frac{1}{2}}\left(I^\dagger\frac{1}{\hat{\Delta}}\hat{\Delta}\hat{\bar{z}}_1\frac{1}{\hat{\Delta}}I-\hat{\bar{z}}_1\right)\Lambda^{-\frac{1}{2}}S^\dagger \\ &=-\frac{1}{\sqrt{\xi_1}}S\Lambda^{-\frac{1}{2}}a_1\Lambda^{\frac{1}{2}}S^\dagger \end{aligned} \tag{4.34}$$

が得られる．結果をまとめると，

$$D_{z_\alpha}=-\sqrt{\frac{1}{\zeta_\alpha}}S\Lambda^{-\frac{1}{2}}a_\alpha\Lambda^{\frac{1}{2}}S^\dagger, \qquad D_{\bar{z}_\alpha}=\sqrt{\frac{1}{\zeta_\alpha}}S\Lambda^{\frac{1}{2}}a_\alpha^\dagger\Lambda^{-\frac{1}{2}}S^\dagger \tag{4.35}$$

と求まる．(4.35) を具体的に書き下すことができるならば，ADHM 構成法で構成された $U(1)$ インスタントンの具体的な表式を得ることができる．

こうして一般論でインスタントンの構成法は理解できるが，実際に具体的にゲージ場やゲージ曲率を得ることができるかどうかは別の問題である．例えば $\hat{\Delta}^{-1}$ を具体的に書き下すことは容易ではない．また，ここまでの節では非可換空間上のゲージ理論の「インスタントン数」を B の行列のサイズとして定義していることに注意されたし．これと第 1 ポントリャーギン数の関係は後で議論する．

4.3.4　非可換 $\mathbb{R}^4$ 上のマルチインスタントン解

非可換 $\mathbb{R}^4$ 上のインスタントンについて具体的な性質を見るためにマルチインスタントンの具体例を見てみることにしよう．いくつかのマルチインスタントン解が知られているが，任意のインスタントン数の解を初等関数で書くことができる伸ばされた (Elongated) インスタントンを見ることにしよう [43]．簡単のため，非可換パラメータに $\zeta_1=\zeta_2\equiv\zeta$ という制限を課す．

インスタントン数 k のインスタントン解

以下では，インスタントン数が k のインスタントン解を具体的に構成する．プロジェクトアウトされる $\mathcal{H}$ の部分空間を以下のように選ぶ．フォック空間の基底のラベルである個数演算子の固有値の組を (n_1,n_2) ととることにして，射影演算子が

$$P=\sum_{n_1=0}^{k-1}|n_1,0\rangle\langle n_1,0| \tag{4.36}$$

となるような解を探すことにする．

もちろんフォック空間で格子点を k 個取り除くこの k が，ADHM データ B のサイズとしてのインスタントン数と直接的に関係していた．一方向に伸びているから伸ばされた (Elongated) インスタントンと呼ぶ．ADHM 方程式の解である ADHM データは

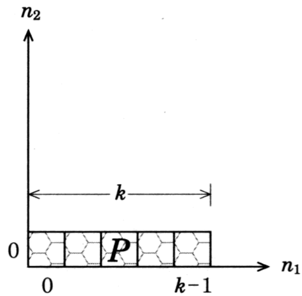


図 4.1　射影演算子で取り除かれる横軸上の k 個の格子.

$$B_1=\sum_{l=1}^{k-1}\sqrt{2l\zeta}e_l e_{l+1}^\dagger=\sqrt{2\zeta}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \sqrt{k-2} & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & \sqrt{k-1} \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{4.37}$$

$$B_2=0$$

$$I=\sqrt{2k\zeta}e_k=\sqrt{2\zeta}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sqrt{k} \end{pmatrix}, \qquad J=0 \tag{4.38}$$

ただし e_i は

$$e_i^\dagger=(\overset{1}{0},\cdots,\overset{i-1}{0},\overset{i}{1},\overset{i+1}{0},\cdots,\overset{k}{0}) \tag{4.39}$$

としている．これらが ADHM 方程式を満たすことは明らかだ．この ADHM データを前節の一般論に代入すると $P=\sum_{n_1=0}^{k-1}|n_1,0\rangle\langle n_1,0|$ の射影演算子が得られる．

次に前節に従ってゲージ場を実際に構成する．そのためには，$\hat{\Delta}$ または Λ を求める必要があった．定義から，

$$\hat{\Delta}[k]=\zeta\left[\hat{N}+\sum_{i=1}^{k-1}\left\{2ie_ie_i^\dagger-\sqrt{2i}(a_1e_ie_{i+1}^\dagger+a_1^\dagger e_{i+1}e_i^\dagger)\right\}\right]$$

$$\Lambda[k]=1+2k\zeta\hat{\Delta}_{kk}^{-1}[k]$$

である．インスタントン数が k の解を構成しているので，$\hat{\Delta}$ と Λ は k に依存する．それを明示するため $\hat{\Delta}[k]$ と $\Lambda[k]$ と書く．$\hat{\Delta}_{kk}^{-1}[k]$ は $\hat{\Delta}^{-1}[k]$ の (k,k) 成分を表している．$\hat{\Delta}_{kk}^{-1}[k]$ を求めるには $\hat{\Delta}^{-1}[k]$ の k 行目のみわかればよい．ADHM データが特別なものであるおかげで逆行列全体を求める必要がないので非常に簡単になっている．$\hat{\Delta}^{-1}[k]$ の k 行目を $\hat{\Delta}^{-1}\hat{\Delta}=1$ で決めることにする．$\hat{\Delta}^{-1}$ の k 行を $u=\dfrac{1}{\zeta}(u_1,\cdots,u_k)$ とおくと，それに $\hat{\Delta}[k]$ を乗じると

$$\begin{aligned}u\hat{\Delta}[k]=&\left\{u_1(\hat{N}+2)-u_2a_1^\dagger\right\}e_1^\dagger\\&+\sum_{i=2}^{k-1}\left\{-\sqrt{2(i-1)}u_{i-1}a_1+u_i(\hat{N}+2i)-\sqrt{2i}u_{i+1}a_1^\dagger\right\}e_i^\dagger\\&+\left\{-\sqrt{2(k-1)}u_{k-1}a_1+u_k\hat{N}\right\}e_k^\dagger\end{aligned}\tag{4.40}$$

である．ただし $\hat{N}$ は個数演算子 $\hat{n}_1$ と $\hat{n}_2$ の和，$\hat{N}=\hat{n}_1+\hat{n}_2$ である．$\hat{\Delta}^{-1}\hat{\Delta}=1$，の k 行から条件式

$$\begin{aligned}&u_2a_1^\dagger-u_1(\hat{N}+2)=0\\&\sqrt{2i}u_{i+1}a_1^\dagger-u_i(\hat{N}+2i)+\sqrt{2(i-1)}u_{i-1}a_1=0\qquad(2\leq i\leq k-1)\end{aligned}\tag{4.41}$$

が得られる．この漸化式が解ければ $\hat{\Delta}_{kk}^{-1}[k]$ は

$$\hat{\Delta}_{kk}^{-1}=\frac{1}{\zeta}\left\{-\sqrt{2(k-1)}u_{k-1}a_1+u_k\hat{N}\right\}^{-1}u_k\tag{4.42}$$

で得られる．漸化式を簡単にするために

$$u_i=w_{i-1}(\hat{n}_1,\hat{n}_2)\frac{(a_1^\dagger)^{k-i}}{\sqrt{2^{i-1}(i-1)!}}\tag{4.43}$$

という置き換えを行うと,

$$w_1-(\hat{N}-k+3)w_0=0$$

$$w_{i+1}-(\hat{N}+3i-k+3)w_i+2i(\hat{n}_1+i-k+1)w_{i-1}=0 \quad (1\le i\le k-2) \tag{4.44}$$

という作用素 w_i に関する漸化式が得られる．この漸化式を解けば w_k が求まり，それを用いて u_k すなわち $\Delta_{kk}^{-1}[k]$ が求まるので，具体的なインスタントンゲージ場を与えることができる．実際に漸化式を解いてみよう．

漸化式にあらわれる個数演算子 $\hat{N},\hat{n}_1,\hat{n}_2$ は互いに可換なので，以下では特に必要がない場合は単なる整数 N,n_1,n_2 のように扱う．ある関数 $F(t;k)$ を

$$F(t;k)=e^{f(t)}(1-at)^{\alpha}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{w_i}{i!}t^i, \qquad f(t)=\int dt\frac{ct}{(1-at)(1-bt)} \tag{4.45}$$

で定義する．ただし a, b, c,α は後で決められる実数パラメータ，第 2 式は不定積分である．もちろん展開係数 w_i が漸化式の解となるように $F(t;k)$ を以下で構成するわけだ．結果としてインスタントン数 k に依存する w_i の生成関数となる．両辺を t で微分して，

$$(1-at)(1-bt)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{w_1}{(i-1)!}t^{i-1}=\{-a\alpha+(c+ab\alpha)t\}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{w_i}{i!}t^i \tag{4.46}$$

が要求される．この式から次の漸化式が得られる．

$$w_{i+1}-(i(a+b)-a\alpha)w_i+i(ab(i-1)-c-ab\alpha)w_{i-1}=0 \tag{4.47}$$

式 (4.44) と (4.47) を比べると，a, b, c, α の満たすべき条件は

$$ab=2, \quad a+b=3, \quad -a\alpha=N-k+3, \quad -1-\alpha-\frac{c}{2}=n_1-k+1 \tag{4.48}$$

とすると，欲しい漸化式が得られることになる．次に (4.45) の中の $f(t)$ の積分を実行すると

$$\begin{aligned} f(t)&=\int\frac{ct}{1-(a+b)t+abt^2}dt \\ &=\frac{c}{2ab}\left\{\ln(1-(a+b)t+abt^2)+\int\frac{(a+b)dt}{1-(a+b)t+abt^2}\right\} \end{aligned}$$

$$
=\frac{c}{2ab}\left\{\ln(1-(a+b)t+abt^2)+\frac{a+b}{\sqrt{D}}\ln\left|\frac{2abt-(a+b)-\sqrt{D}}{2abt-(a+b)+\sqrt{D}}\right|\right\}
$$

$$
=\frac{c}{4}\left\{\ln((1-t)(1-2t))+3\ln2\left|\frac{1-t}{1-2t}\right|\right\} \tag{4.49}
$$

となる．ただし $D=(a+b)^2-4ab=9-8=1>0$ とし，また関係式 (4.48) を用いた．結果として漸化式を満たす w_i の生成関数が

$$
F(t;k)=2^{\frac{3}{4}c}(1-t)^c(1-2t)^{-\frac{c}{2}}(1-at)^{\alpha} \tag{4.50}
$$

と得られる（計算上は $t<1$ を使っているが w_i を得るには $t=0$ とするので問題はない）．

パラメータの関係式 (4.48) から 2 種類の解が得られ $(a=1,b=2)$ と $(a=2,b=1)$ より

$$
F(t;k)=\begin{cases} 2^{\frac{3}{2}(n_2+1)}(1-t)^{-n_1+n_2+k-1}(1-2t)^{-n_2-1} & (a=1,b=2) \\ 2^{\frac{3}{4}(-n_1+n_2+k-1)}(1-t)^{\frac{1}{2}(-3n_1+n_2+3k-5)}(1-2t)^{\frac{1}{2}(n_1-n_2-k+1)} & \\ & (a=2,b=1) \end{cases} \tag{4.51}
$$

が得られる．ただし実際のゲージ場が発散を持たないように $(a=1,b=2)$ の場合を選び，最終的な結果として w_i の母関数は

$$
F(t;k)=(1-t)^{-n_1+n_2+k-1}(1-2t)^{-n_2-1}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{w_i}{i!}t^i
$$

とする．

この $w_i(n_1,n_2)$ を用いて $\Delta_{kk}^{-1}[k]$ が求まるので，$\varLambda[k]$ も

$$
\varLambda[k](n_1,n_2)=\frac{w_k(n_1,n_2)}{w_k(n_1,n_2)-2kw_{k-1}(n_1,n_2)}
$$

と解ける．$w_i(n_1,n_2)$ は個数演算子にのみ依存するので $w_i^{-1}(n_1,n_2)$ などは n_1 と n_2 に形式的にそれらの固有値を代入して求まるとしている．$\varLambda[k]$ も個数演算子 $\hat{n}_1,\hat{n}_2$ だけで表されるのでフォック空間では対角行列であるため $\varLambda[k](n_1,n_2)$ と書いた．つまり $\langle n_1,n_2|\varLambda[k]|n_1,n_2\rangle$ である．G, P, S も

$$G=\langle 0,0|e^{\sum_\alpha \beta_\alpha a_\alpha} II^\dagger e^{\sum_\alpha \beta_\alpha^\dagger a_\alpha^\dagger}|0,0\rangle = k!\zeta\sum_{i=1}^{k}\frac{(\zeta^2)^{k-i}}{i!(k-i)!}e_i e_i^\dagger$$

$$P=I^\dagger e^{\sum_\alpha \beta_\alpha^\dagger a_\alpha^\dagger}|0,0\rangle G^{-1}\langle 0,0|e^{\sum_\alpha \beta_\alpha a_\alpha} I=\sum_{n_1=0}^{k-1}|n_1,0\rangle\langle n_1,0| \tag{4.52}$$

$$S^\dagger=\sum_{n_1=0}^{\infty}|n_1+k,0\rangle\langle n_1,0|+\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}|n_1,n_2\rangle\langle n_1,n_2|$$

と求まる．

上の結果から伸ばされた (Elongated)$U(1)$ インスタントンのインスタントン数 k のゲージ場はあらわに

$$D_{z_1}=-\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}|n_1,n_2\rangle\langle n_1+1,n_2|d_1(n_1,n_2;k) \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}D_{z_2}=-\sqrt{\frac{1}{\zeta}}\Bigg\{&\sum_{n_1=0}^{\infty}|n_1,0\rangle\langle n_1+k,1|d_2(n_1,0;k)\\ &+\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}|n_1,n_2\rangle\langle n_1,n_2+1|d_2(n_1,n_2;k)\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.54}$$

と与えられる．ただし

$$d_1=\begin{cases}\sqrt{n_1+k+1}\left[\dfrac{\Lambda(n_1+k+1,0)}{\Lambda(n_1+k,0)}\right]^{\frac{1}{2}} & (n_2=0)\\ \sqrt{n_1+1}\left[\dfrac{\Lambda(n_1+1,n_2)}{\Lambda(n_1,n_2)}\right]^{\frac{1}{2}} & (n_2\neq 0)\end{cases} \tag{4.55}$$

$$d_2=\begin{cases}\left[\dfrac{\Lambda(n_1+k,1)}{\Lambda(n_1+k,0)}\right]^{\frac{1}{2}} & (n_2=0)\\ \sqrt{n_2+1}\left[\dfrac{\Lambda(n_1,n_2+1)}{\Lambda(n_1,n_2)}\right]^{\frac{1}{2}} & (n_2\neq 0)\end{cases} \tag{4.56}$$

とした．曲率もこの関数を使ってあらわに書き下すことができる．反自己双対なので $F_{z_1z_2}=F_{\bar{z}_1\bar{z}_2}=0$ である．その他の成分は

$$F_{z_1\bar{z}_1}=\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{\zeta}\left[\sum_{n_2=0}^{\infty}|0,n_2\rangle\langle 0,n_2|(d_1(0,n_2;k))^2\right.$$

$$+\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}|n_1,n_2\rangle\langle n_1,n_2|\Big\{\big(d_1(n_1,n_2;k)\big)^2-\big(d_1(n_1-1,n_2;k)\big)^2\Big\}\Bigg] \tag{4.57}$$

$$F_{z_2\bar{z}_2}=\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{\zeta}\left[\sum_{n_1=0}^{\infty}|n_1,0\rangle\langle n_1,0|\big(d_2(n_1,0;k)\big)^2+\sum_{n_1=0}^{k-1}|n_1,1\rangle\langle n_1,1|\big(d_2(n_1,1;k)\big)^2\right.$$
$$+\sum_{n_1=k}^{\infty}|n_1,1\rangle\langle n_1,1|\Big\{\big(d_2(n_1,1;k)\big)^2-\big(d_2(n_1-k,0;k)\big)^2\Big\}$$
$$\left.+\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty}|n_1,n_2\rangle\langle n_1,n_2|\Big\{\big(d_2(n_1,n_2;k)\big)^2-\big(d_2(n_1,n_2-1;k)\big)^2\Big\}\right] \tag{4.58}$$

$$F_{z_1\bar{z}_2}=-\frac{1}{\zeta}\left[|k-1,1\rangle\langle 0,0|d_1(k-1,1;k)d_2(0,0;k)+\sum_{n_1=1}^{\infty}|n_1+k-1,1\rangle\langle n_1,0|\right.$$
$$\times\Big\{d_1(n_1+k-1,1;k)d_2(n_1,0;k)-d_1(n_1-1,0;k)d_2(n_1-1,0;k)\Big\}$$
$$+\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}|n_1-1,n_2+1\rangle\langle n_1,n_2|\times\Big\{d_1(n_1-1,n_2+1;k)d_2(n_1,n_2;k)$$
$$\left.-d_1(n_1-1,n_2;k)d_2(n_1-1,n_2;k)\Big\}\right] \tag{4.59}$$

$$F_{\bar{z}_1z_2}=-F_{z_1\bar{z}_2}^{\dagger}$$
$$=\frac{1}{\zeta}\left[|0,0\rangle\langle k-1,1|d_1(k-1,1;k)d_2(0,0;k)+\sum_{n_1=1}^{\infty}|n_1,0\rangle\langle n_1+k-1,1|\right.$$
$$\times\Big\{d_1(n_1+k-1,1;k)d_2(n_1,0;k)-d_1(n_1-1,0;k)d_2(n_1-1,0;k)\Big\}$$
$$+\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}|n_1,n_2\rangle\langle n_1-1,n_2+1|\times\Big\{d_1(n_1-1,n_2+1;k)d_2(n_1,n_2;k)$$
$$\left.-d_1(n_1-1,n_2;k)d_2(n_1-1,n_2;k)\Big\}\right] \tag{4.60}$$

と与えられる．こうしてマルチインスタントンの具体的な解を得ることができたので様々な性質を読み取ることができる．この節で求めた解は $\zeta_1=\zeta_2$ と非可換パラメータに制限を付けたが $\zeta_1\neq\zeta_2$ の場合も全く同様に構成できる．次の 4.3.5 節で結果だけ紹介する．

4.3.5 $\zeta_1 \neq \zeta_2$ のマルチインスタントン解

前節のマルチインスタントン解は非可換パラメータが $\zeta_1 = \zeta_2$ の場合に限られていたので，一般に $\zeta_1 \neq \zeta_2$ の場合の解を紹介しておく．ただし，構成方法は前節と全く同じなので詳細は省略する．

インスタントン数 k のインスタントン解

(4.38) の ADHM データは同じものを用いる．定義から，

$$\hat{\Delta}[k] = \zeta_1 \hat{n}_1 + \zeta_2 \hat{n}_2 + (\zeta_1 + \zeta_2) \sum_{i=1}^{k-1} i e_i e_i^\dagger - \sqrt{\zeta_1(\zeta_1+\zeta_2)}$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{i} \{ a_1 e_i e_{i+1}^\dagger + a_1^\dagger e_{i+1} e_i^\dagger) \}$$

$$\Lambda[k] = 1 + (\zeta_1 + \zeta_2) k \hat{\Delta}_{kk}^{-1}[k]$$

である．前節同様 $\hat{\Delta}^{-1}[k]$ の k 行目のみわかればよいので，k 行目を $(u_1, \cdots, u_k)$，$\hat{\Delta}_{ki}^{-1}[k] = u_i$ とおく．$\hat{\Delta}^{-1}\hat{\Delta} = 1$ の k 行目から，次の漸化式を解けばいいことがわかる．

$$u_2 a_1^\dagger - \frac{1}{\sqrt{\tilde{\theta}}} u_1 (1 + \tilde{\theta} \hat{n}_1 + (1 - \tilde{\theta}) \hat{n}_2) = 0$$

$$\sqrt{i}\ u_{i+1} a_1^\dagger - \frac{1}{\sqrt{\tilde{\theta}}} u_i (i + \tilde{\theta} \hat{n}_1 + (1 - \tilde{\theta}) \hat{n}_2) + \sqrt{i-1} u_{i-1} a_1 = 0 \qquad (1 \leq i \leq k-2)$$

ただし，$\tilde{\theta} = \zeta_1 / (\zeta_1 + \zeta_2)$ としている．

$$u_i = w_{i-1} \frac{a_1^{\dagger (k-i)}}{\sqrt{(i-1)!}}$$

と置き換えると，作用素 w_i に対する漸化式が

$$w_1 - \frac{1}{\sqrt{\tilde{\theta}}} (1 + \tilde{\theta}(\hat{n}_1 - k + 1) - (1 - \tilde{\theta}) \hat{n}_2) w_0 = 0$$

$$w_{i+1} - \left\{ i \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{\theta}}} + \sqrt{\tilde{\theta}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\tilde{\theta}}} (\tilde{\theta}(\hat{n}_1 - k) + (1 - \tilde{\theta}) \hat{n}_2) + \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{\theta}}} + \sqrt{\tilde{\theta}} \right) \right\} w_i$$

$$+ i((i-1)\hat{n}_1 - k + 2) w_{i-1} = 0 \qquad (2 \leq i \leq k-1) \tag{4.61}$$

$F(t;k)$ を前節同様に (4.45) で導入して a, b, c, α を (4.61) を満たすように決

めればよい．a, b, c, α の満たすべき条件は

$$a=\sqrt{\tilde{\theta}} \quad \text{または} \quad \frac{1}{\sqrt{\tilde{\theta}}}, \qquad b=\frac{1}{a}$$

$$\alpha=-\frac{h(\tilde{\theta},n_1,n_2)}{a}, \qquad c=-n_1+k-2+\frac{h(\tilde{\theta},n_1,n_2)}{a} \tag{4.62}$$

$$\text{ただし} \quad h(\tilde{\theta},n_1,n_2)=\frac{1}{\sqrt{\tilde{\theta}}}\{\tilde{\theta}(n_1-k)+(1-\tilde{\theta})n_2\}+\tilde{\theta}+\frac{1}{\sqrt{\tilde{\theta}}}$$

と解くことができる．結果として漸化式を満たす w_i の生成関数 $F(t;k)$ が，得られた a, b, c, α を (4.45) に代入して得られる．ここで具体的に書き下すことはしないが不定積分も (4.49) で見たように任意のインスタントン数 k の場合に簡単に実行できるので $F(t;k)$ は初等関数で完全に得られる．この w_{k-2} を用いて

$$\Delta_{kk}^{-1}[k]=u_k=\left(1+\sqrt{\zeta_1(\zeta_1+\zeta_2)}\frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{(k-2)!}}w_{k-2}\hat{n}_1\right)(\zeta_1\hat{n}_1+\zeta_2\hat{n}_2)^{-1}$$

と求まる．G,P,S,Λ も

$$G=(\zeta_1+\zeta_2)k!\sum_{i=1}^{k}\{i!(k-i)!\tilde{\theta}^{k-i}\}^{-1}e_ie_i^\dagger$$

$$P=I^\dagger e^{\sum_\alpha \beta_\alpha^\dagger a_\alpha^\dagger}|0,0\rangle G^{-1}\langle 0,0|e^{\sum_\alpha \beta_\alpha a_\alpha}I=\sum_{n_1=0}^{k-1}|n_1,0\rangle\langle n_1,0| \tag{4.63}$$

$$S^\dagger=\sum_{n_1=0}^{\infty}|n_1+k,0\rangle\langle n_1,0|+\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}|n_1,n_2\rangle\langle n_1,n_2|$$

$$\Lambda=1+(\zeta_1+\zeta_2)ku_k \tag{4.64}$$

と求まる．上の結果から，インスタントン数 k のゲージ場はあらわに

$$D_1=\sqrt{\frac{1}{\zeta_1}}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}|n_1,n_2\rangle\langle n_1+1,n_2|d_1(n_1,n_2;k) \tag{4.65}$$

$$D_2=\sqrt{\frac{1}{\zeta_2}}\left\{\sum_{n_1=0}^{\infty}|n_1,0\rangle\langle n_1+k,1|d_2(n_1,0;k)\right. \tag{4.66}$$

$$\left.+\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}|n_1,n_2\rangle\langle n_1,n_2+1|d_2(n_1,n_2;k)\right\}$$

と与えられる．ただし d_1,d_2 は (4.55) と (4.56) で定義したものである．このよ

うにして，$\zeta_1 \neq \zeta_2$ の場合でも前と全く同様にして任意のインスタントン数を持つインスタントンが具体的に初等関数を用いて構成された.

4.3.6　マルチインスタントンの性質

4.3.4 節と 4.3.5 節で非可換 $\mathbb{R}^4$ 上の具体的なマルチインスタントンを構成したのでここではいくつかの性質を眺めてみることにしよう.

インスタントン数とインスタントン密度

初めにインスタントン数について考察しよう．非可換 $\mathbb{R}^4$ でのインスタントン数は ADHM データの行列のサイズとして定義していたが，インスタントン数はもともと可換な空間上では第一ポントリャーギン類の積分で定義されていた．しかし，非可換空間上でそのような定義で与えたインスタントン数と ADHM データの行列サイズで与えたインスタントン数が一致するという根拠は前節までの議論の中には全く無いし，また整数で与えられると考えるよりは非可換パラメータで展開される実数値で与えられると考える方が自然である．しかし実際には，インスタントン解に限って言えば，第一ポントリャーギン類の積分とみなされるもので定義したものは整数値を与え，また ADHM データの行列のサイズとして定義していたが，インスタントン数と一致することを証明することができる．その証明の概略は次の節で与えるとしてここでは，具体的な解に基づいて得られたデータを見て，非可換 $\mathbb{R}^4$ でのインスタントンとインスタントン数の挙動を見てみよう.

インスタントン数をポントリャーギン類で書いたものを素直に非可換の言葉に直す．つまり積分をヒルベルト空間のトレースで置き換えると，

$$Q = \zeta^2 \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(F_{z_1\bar{z}_1}F_{z_2\bar{z}_2} - F_{z_1\bar{z}_2}F_{z_2\bar{z}_1})$$

となる[5]．計算機に乗せて挙動を見るためにもトレースの上限（カットオフ）n で与え，

---

[5] この定義のままでは条件収束になり正しい定義ではないことがわかるが，正確な定義は上に書かれた Q_∞ で与えられる．しかしこうした定義ももう少し洗練されたものに今後置き換わっていくものと思われる.

表 4.1 Q の振る舞い

k	Q_n $n=10$	$n=20$	$n=50$
1	-0.991033	-0.997442	-0.999557
2	-1.96443	-1.98977	-1.99823
3	-2.91641	-2.97653	-2.99599
4	-3.83934	-3.95662	-3.99282
5	-4.72416	-4.92835	-4.98864
6	-5.56423	-5.88927	-5.98336
7	-6.35653	-6.83624	-6.97688
8	-7.09772	-7.76553	-7.96905
9	-7.79167	-8.67337	-8.95968
10	-8.45736	-9.55689	-9.94857
15	-11.1219	-13.6201	-14.855

$$Q_n = -k \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n} \rho(n_1, n_2)$$

$$Q_\infty = \lim_{n \to \infty} Q_n = Q$$

ととることにする．ただしインスタントン密度 ρ を

$$\rho(n_1,n_2) := -\frac{\zeta^2}{k} \langle n_1,n_2 | (F_{z_1\bar{z}_1} F_{z_2\bar{z}_2} - F_{z_1\bar{z}_2} F_{z_2\bar{z}_1}) | n_1,n_2 \rangle$$

とした．今はとりあえずヒルベルト空間の基底をフォック空間で記述するものとし個数演算子の固有値の上限を n とした．上限をずらしながらいろいろなインスタントン数 k について Q_n の値を調べてみたものが表 4.1 である．表を見てわかるように，ADHM データの行列サイズで与えられている k と Q_n がカットオフ n を大きくしていくと一致することがわかるであろう．

収束性を見るために $-Q_n/k$ が 1 に近づく様子を調べたグラフは図 4.2 である．

また今与えられている ADHM データ (4.38) はヒルベルトスキームの観点から考えると k 個の点が様々な速度で原点に近づいてきて原点に縮退している状況と読むことができるが，インスタントン密度 $\rho(n_1,n_2)$ にその様子が反映して

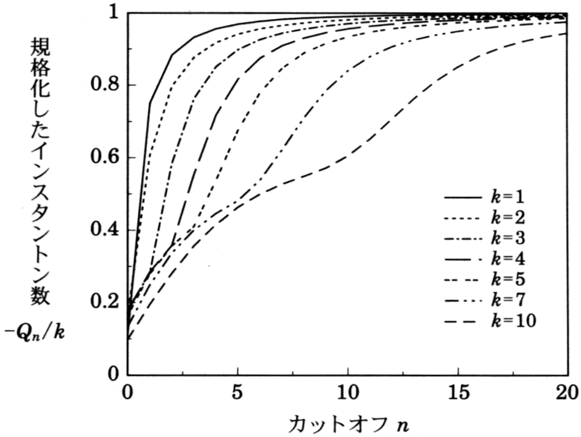


図 4.2　n が増えるのに伴い $-Q_n/k$ が 1 に近づき良い収束性を見せている.

いる. 図 4.3 〜図 4.6 にそれを示した. 横軸 $X1$ と縦軸 $X2$ は n_1 と n_2 を表し, 高さ $X3$ が密度 $\rho(n_1,n_2)$ を表している. 密度の山で離れているところがあるのは, ゲージ曲率に定数部分があることを反映している (曲率 (4.18) を参照).

4.3.7　$U(1)$ インスタントンのポントリャーギン類

ここでは前節で触れたとおり ADHM データの B_i 行列のサイズで定義した整数のインスタントン数と第一ポントリャーギン類の積分との同等性の証明の概要を与えよう [43].

第一ポントリャーギン類の積分と対応がつく以下の量をカットオフ付きで定義する.

$$Q_n = -k \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n} \rho(n_1,n_2)$$

$$Q_\infty = \lim_{n\to 0} Q_n = Q$$

実は**カットオフが無いと収束列として定義できない**. インスタントンは一般にシフト演算子を用いて定義されるが, シフト演算子は無限次元ヒルベルト空間であ

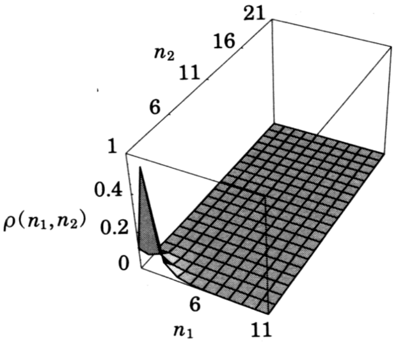


図 **4.3**　$k=1$

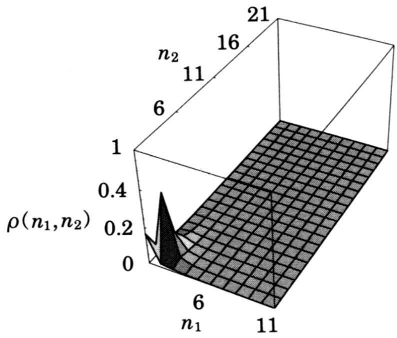


図 **4.4**　$k=2$

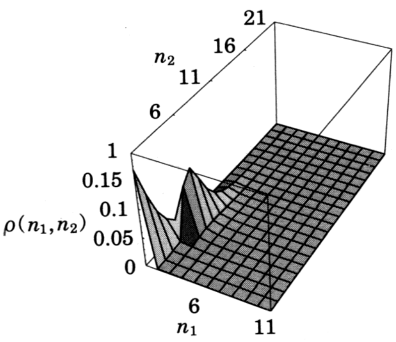


図 **4.5**　$k=5$

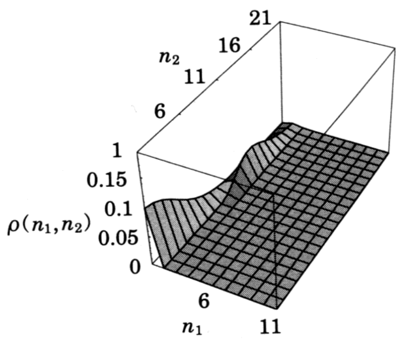


図 **4.6**　$k=10$

るからこそ意味のある量を引き出せる演算子で，その影響は一般にカットオフをどんなに大きくとっても有限に残ってしまう．したがって積分を素朴にヒルベルト空間のトレースで置き換えたものを考えてもトレースのとり方が一意でないために不定性がでてしまう．つまりトレースという無限和のとり方の順序を変えると結果が変わってしまい，条件収束となってしまうのである．

それを避けるために有限な和で定義しておいた Q_n の極限として第一ポントリャーギン類の積分を定義することで，収束列としてインスタントン数を定義することができるのである．このカットオフのためにヒルベルト空間が有限領域に

制限され，その上で計算が実行されることでかなり直接的な計算で証明が実行できる．

ストークスの定理に似た定理

道具としてフォック空間上にストークスの定理を作ってみる．

任意の作用素を $O=\sum|n_1,n_2\rangle O_{n_1,n_2,m_1,m_2}\langle m_1,m_2|$ として，微分に対応する消滅演算子による交換関係 $[a_i,O]$ をとり，積分に対応してヒルベルト空間の特定の領域 (domain) で和をとる ($\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}|_{\mathrm{domain}}$) と，ストークスの定理同様に境界領域での和 ($\sum\limits_{((n_1,n_2)\in\mathrm{boundary})}$) に置き換わり以下の式が得られる．

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}|_{\mathrm{domain}}([a_1,O]+[a_2,O])\\&\quad=\sum_{((n_1,n_2)\in\mathrm{boundary})}\{O_{n_1+1,n_2,n_1,n_2}\sqrt{n_1+1}\,\theta(n_1+1\notin\text{領域})\\&\qquad-O_{n_1,n_2,n_1-1,n_2}\sqrt{n_1}\,\theta(n_1-1\notin\text{領域})\}+\{n_1\leftrightarrow n_2\}\end{aligned}\tag{4.67}$$

ただし，$\{n_1\leftrightarrow n_2\}$ は直前の項の n_1 と n_2 の役割を入れ替えた量を表し，θ(命題) は

$$\theta(\text{命題})=\begin{cases}1:\text{命題が真}\\0:\text{命題が偽}\end{cases}\tag{4.68}$$

とした．積分領域（和をとる領域）は 2 次元のフォック空間の格子点で表されるので，その領域の変化の様子を模式的に表したものが図 4.7 である．

インスタントン方程式の利用

上で得られたストークスの定理のようなものを利用して計算をするのであるがその概要を述べる．$U(1)$ の場合，ADHM 構成からインスタントンゲージ場が一般に

$$D_\alpha=-\sqrt{\frac{1}{\zeta}}S\Lambda^{-\frac{1}{2}}(n_1,n_2)a_\alpha\Lambda^{\frac{1}{2}}(n_1,n_2)S^\dagger\tag{4.69}$$

と与えられていた．しかし一般には $\Lambda(n_1,n_2)$ は求めるのは不可能である（伸ばされた (Elongated) インスタントンのように特別な場合のみ求まった）．した

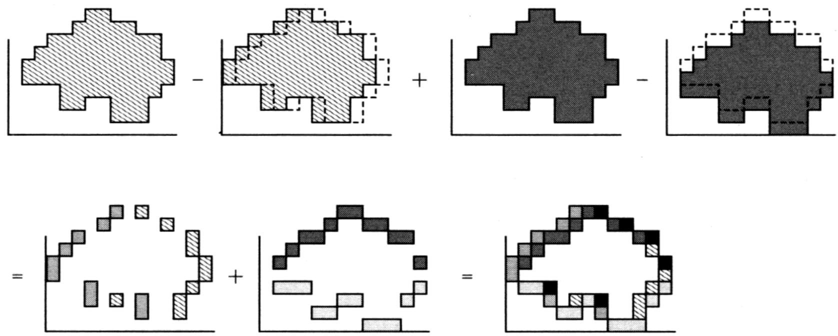


図 4.7　フォック空間でのストークスの定理．最初の二つの図が a_1 による交換関係で生じる n_1 方向のズレを表し，次の二つの図が a_2 による n_2 方向のズレを表している．

がって ADHM 構成法を使わず，ゲージ場が (4.69) の形であることを使用し，それに対してインスタントン方程式を満たすことを要請して得られる条件

$$\left\{(n_1+1)\frac{\Lambda(n_1+1,n_2)}{\Lambda(n_1,n_2)}\theta((n_1,n_2)\notin\mathcal{P})-n_1\frac{\Lambda(n_1,n_2)}{\Lambda(n_1-1,n_2)}\theta((n_1-1,n_2)\notin\mathcal{P})\right\}$$
$$+\{n_1\leftrightarrow n_2\}=2 \tag{4.70}$$

を用いる．ただし $\mathcal{P}$ は射影演算子 P で射影される空間に対応する (n_1,n_2) の集合を表している．

ポントリャーギン数は，曲率の定数部分からくる定数 1 をカットオフの全領域にわたって和をとる部分と，全微分で書かれストークスの定理により境界部分の和になる部分とに分けて計算される．(4.70) を用いることで境界での計算が実際に実行できる．さらに先ほど同様カットオフを n_1,n_2 それぞれに対して同じ n で設定すると，和を取る領域は正方形領域で面積 $(n+1)^2$ となる．したがって定数 1 からの寄与は $(n+1)^2$ で得られる．

一方，全微分でかかれる部分は (4.69) を見てわかるようにシフト演算子 $S,S^\dagger$ で挟まれているために，和をとる領域が実質的にプロジェクション P で除かれている k 個の格子点の分 $(n+1)^2$ の外側にずれてしまう．このため結果として

$$Q=(n+1)^2-((n+1)^2+k)=-k \tag{4.71}$$

となって，第一ポントリャーギン類の積分と ADHM データの行列サイズで定義されたインスタントン数が一致することが示される．結果をまとめると以下のようになる．

非可換 $\mathbb{R}^4$ 上の $U(1)$ ゲージ理論において，インスタントンゲージ場を用いて定義した第一ポントリャーギン類の積分は整数値を取り，ADHM データで現れる行列のサイズで定義されたインスタントン数と一致する．

インスタントン数のオリジン

以上の考察からインスタントン数が整数で与えられることの理由の本質をまとめると次のように言える．ゼロモードの存在を取り除くために $\Psi^\dagger$ と Ψ ではさまれた領域ではヒルベルト空間が k 個ずれている．そのずれがインスタントン数として現れる．

この定理に関しては古内によってもイディアルの対応などで重要な結論が与えられているのでそれに対する参考文献も挙げておく [44].

4.3.8 $U(N)$ のポントリャーギン類

前節の議論では $U(1)$ の特殊性つまり $J=0$ とおけることを使っている．しかし前節の定理は $U(N)$ の場合に拡張できることを示すこともできる [46]．例えば $U(N)$ のゲージ理論の場合ではフォック空間に k 次元のゼロモードがあることは今のところ明らかではないが，この点を明らかにするとあとはより複雑な計算を頑張るだけで $U(1)$ の場合とパラレルな議論ができそうなことは想像できるであろう．

$\Psi\Psi^\dagger$ のゼロモード

ベクトル $|v\rangle \in (\mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^n) \otimes \mathcal{H}$ が以下の条件を満たすとき

$$\Psi\Psi^\dagger|v\rangle = 0, \qquad \langle v|\Psi\Psi^\dagger = 0, \qquad |v\rangle \neq 0 \tag{4.72}$$

を $\Psi\Psi^\dagger$ のゼロモードと呼ぶことにする．このときゼロモードは以下の 3 タイプとして得られる．

$$
|v_1\rangle = \begin{pmatrix} (-B_1+\sqrt{\zeta}a_1)|u\rangle \\ (B_2-\sqrt{\zeta}a_2)|u\rangle \\ J|u\rangle \end{pmatrix} \tag{4.73}
$$

$$
|v_2\rangle = \begin{pmatrix} (B_2^\dagger-\sqrt{\zeta}a_2^\dagger)|u'\rangle \\ (B_1^\dagger-\sqrt{\zeta}a_1^\dagger)|u'\rangle \\ I^\dagger|u'\rangle \end{pmatrix} \tag{4.74}
$$

$$
|v_0\rangle = \begin{pmatrix} (\exp\sum_\alpha B_\alpha^\dagger a_\alpha^\dagger)|0,0\rangle v_0^i \\ (\exp\sum_\alpha B_\alpha^\dagger a_\alpha^\dagger)|0,0\rangle v_0^i \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.75}
$$

ここで $|u\rangle$ ($|u'\rangle$) は $\mathbb{C}^k\otimes\mathcal{H}$ の要素である（つまり，$|u\rangle=\sum_i\sum_{n,m}u_i^{nm}|n,m\rangle$ と書ける）．また v_0^i は k 次元ベクトルである．以下で，この主張を証明しよう．

証明　(4.24) 式から，$D\frac{1}{D^\dagger D}D^\dagger$ のゼロでない固有値を持つ固有状態を，$\Psi\Psi^\dagger$ はゼロモードとして持つ．$D\frac{1}{D^\dagger D}D^\dagger$ は射影演算子なので固有値は 1 である．因子化条件より，$D\frac{1}{D^\dagger D}D^\dagger$ の固有ベクトルは直交する二つの固有ベクトル τ の固有ベクトルまたは $\sigma^\dagger$ の固有ベクトルに分けられる．$\tau\sigma=0$ より $|v_1\rangle$ ($|v_2\rangle$) は $\mathrm{Ker}\tau$ ($\mathrm{Ker}\sigma^\dagger$) に含まれる．

$$
\tau|v_1\rangle=\tau\sigma|u\rangle=0, \quad \sigma^\dagger|v_2\rangle=\sigma^\dagger\tau^\dagger|u'\rangle=0 \tag{4.76}
$$

もし $|u\rangle$ と $|u'\rangle$ がゼロベクトルでないなら $\Box$ がゼロモードを持たないことから，

$$
\sigma^\dagger|v_1\rangle=\sigma^\dagger\sigma|u\rangle=\Box|u\rangle\neq 0, \quad \tau|v_2\rangle=\tau\tau^\dagger|u'\rangle=\Box|u'\rangle\neq 0 \tag{4.77}
$$

である．k 個の独立なベクトル $\sum_{nm}u_i^{nm}|n,m\rangle$ $(i=(1,\cdots,k))$ を選び規格直交化しておくと，($\Psi\Psi^\dagger$ のゼロモードである）k 次元直交規格固有ベクトルが得られる．$\sum_{nm}{u'}_i^{nm}|n,m\rangle$ も $\sum_{nm}u_i^{nm}|n,m\rangle$ と同様に k 次元ゼロモード空間を作ることができる．

残りは $|v_0\rangle$ についてである．

$$\sigma^\dagger |v_0\rangle = 0 \tag{4.78}$$

より，$|v_0\rangle$ は τ の固有状態に属する．以下の式より $|v_2\rangle$ とは独立

$$\langle v_0 | v_2 \rangle = 0 \tag{4.79}$$

である．直交化すると $D\dfrac{1}{D^\dagger D}D^\dagger$ の k 個の固有ベクトル空間を与え，それはすなわち $\Psi\Psi^\dagger$ のゼロモードを意味する．こうして上の主張は証明された． ■

注意　$2k$ 個のゼロモード $|v_1\rangle, |v_2\rangle$ は $2k+N$ 次元から $U(N)$ の元である N 次元に落とすだけの役割を果たす．つまり可換空間の ADHM 構成法のときとなんら変わらないゼロモードである．ゼロモード $|v_0\rangle$ の存在がまさに積分領域のヒルベルト空間を k 個ずらす働きをし，結果的にインスタントン数のオリジンとなるゼロモードを与えていることに注意されたし．

これ以上の詳細の計算には触れないが $U(N)$ ゲージ理論の曲率で定義されたポントリャーギン類の積分の計算も非常に直接的に計算することが可能である．結果だけ以下に書く．

非可換 $\mathbb{R}^4$ 上の $U(N)$ ゲージ理論において，インスタントンゲージ場を用いて定義した第一ポントリャーギン類の積分は整数値を取り，ADHM データで現れる行列のサイズで定義されたインスタントン数と一致する．

補足

非可換 $\mathbb{R}^4$ 上のゲージ理論の特にインスタントンの性質について詳しく見てきた．現在までの結果からは位相不変量であるインスタントン数などは非可換空間への量子変形に大して影響を受けないように見えている．実際に 2 次元における渦子 (Vortex) 数や 3 次元におけるモノポールなどでもそういう傾向があるようだが，このような性質が常に成り立つという証明は今のところ無い．非可換ユークリッド空間の場合の量子変形がモヤル積で書かれることは，量子変形で受ける変更が一般により高次の微分になり収束しやすい傾向を持っていることを意味す

る．局所的な全微分で書かれる位相不変量への影響は十分遠方では無視することができるのである．しかし例えばファジー球（全くここでは説明しないが）などのように量子変形のパラメータの次元が非可換ユークリッドの場合と異なる場合はこのような素朴な洞察が通用するかどうかはわからない．少なくとも現時点で筆者は今後明らかになっていく問題だと思っている．

4.4　非反可換な超対称空間と半分の超対称理論

前節までは非可換ユークリッド空間上の場の理論についていろいろ考察してきた．しかし近年，非可換なのはボゾニックな空間だけではなくフェルミオニックな空間も非（反）可換である理論が登場してきている．フェルミオニックな座標は超対称性の章で見てきたように通常互いに「反可換」つまり

$$\{\theta_1,\theta_2\}=\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_1=0\Longrightarrow\neq 0$$

を満たすものであったが，これが 0 にならない場合を考えなければいけないということである．したがって「非反可換 (non-anticommutative)」[6)] な空間上の場の理論と呼ばれている．そのような理論を考える必要性はやはり超弦理論によってもたらされた．

この章の最初に 2 階の反対称な場を背景としてもつ超弦理論の低エネルギーで有効な場の理論が非可換空間上の場の理論と等価であることを説明し，その対応関係がサイバーグ-ウィッテン写像として与えられることを見た．それと同様にグラヴィフォトン (graviphoton) と呼ばれる場の背景をもつ超弦理論について大栗-ヴァッファ，サイバーグ等 [47, 48] によって議論され，超空間の非可換化すなわち非反可換 (non-anticommutative) な場の理論が現れることを示した．形式的に非反可換 (non-anticommutative) な場の理論はフェラーラ (S. Ferrara), レード (M.A. Lledo), アバスパー (R. Abbaspur) 等によって考えられてはいたのであるが実際に物理的に実在する可能性がわかってから活発に研究されている

---

6) 「非 (non)」と「反 (anti)」が打ち消しあって「非反交換」が「交換」にはならない，ややこしいネーミングである．この非反交換な空間上の非アーベリアンゲージ理論の非摂動的振る舞いなどを調べると非の打ち所の無い話であることは間違いない．

ので，この章の最後にそれについて述べることにする．

この節は主にフェラーラ達の論文に従って非反可換 (non-anticommutative) な場の理論の構成を定式化する [49].

$D=4$, $N=1$ 超対称性の復習

1.7 節で超対称性を持った場の理論や超場について詳しく学んだが，この節で必要となる最小限の事柄を今一度まとめておこう．超対称共変微分が

$$D_\alpha = \partial_{\theta^\alpha} + i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu$$

$$\bar D_{\dot\alpha} = +\partial_{\bar\theta^{\dot\alpha}} + i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu \tag{4.80}$$

で与えられたときに，それらの反交換関係は

$$\{D_\alpha, \bar D_{\dot\alpha}\} = +2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu, \qquad \text{その他の反交換関係} = 0 \tag{4.81}$$

となった．超対称変換を引き起こす超対称生成子 Q_α, $\bar Q_{\dot\alpha}$ は D_α, $\bar D_{\dot\alpha}$ と可換に作られ

$$Q_\alpha = \partial_{\theta^\alpha} - i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu$$

$$\bar Q_{\dot\alpha} = -\partial_{\bar\theta^{\dot\alpha}} + i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu \tag{4.82}$$

で与えられていた．反交換関係から運動量 ∂_μ が生じ $\mathcal{N}=2$ 以上の超対称性理論では BPS 条件がでる重要な式が

$$\{Q_\alpha, \bar Q_{\dot\alpha}\} = 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu, \qquad \text{その他の反交換関係} = 0 \tag{4.83}$$

であった．

超対称共変微分を用いてカイラル超場 Φ と反カイラル超場 $\bar\Phi$,

$$\bar D_{\dot\alpha}\Phi = 0, \qquad D_\alpha\bar\Phi = 0 \tag{4.84}$$

を定義することで既約な超対称変換群の表現を得ることができた．

ここで以下の非反可換変形において重要となってくる性質を列挙しておく．カイラル超場（あるいは反カイラル超場）は半分の超対称性の下で不変であること，すなわち

$$QD^2\Phi|_{\bar\theta=0}=0,\qquad \bar Q\bar D^2\bar\Phi|_{\theta=0}=0 \tag{4.85}$$

である．一方で残り半分の超対称変換に対しては全微分

$$\bar Q D^2\Phi|_{\bar\theta=0}=\text{全微分},\qquad Q\bar D^2\bar\Phi|_{\theta=0}=\text{全微分} \tag{4.86}$$

で得られる．通常の超対称空間で超対称な場の理論を構成する際にこれらの性質が用いられた．ラグランジアンをスカラーなカイラル（または反カイラル）超場とみなせるように作ることで超対称な「作用」を得ることができていた．なぜなら，元々不変な半分の超対称変換はもとより，残り半分の超対称性変換もそれを空間積分した「作用」に関しては全微分項は0とみなすことができるので,「作用」は完全に超対称変換に対して不変になるのであった．

ところが，以下で導入される非反可換な超空間上では超場の超対称変換が完全に不変であるか全微分であるかの違いによって，半分の超対称が破れてしまうのである．これが「1/2 超対称性」と呼ばれる理論である．

フェラーラ達の方法

ここでフェラーラ達に従い非反可換な変形を構成してみる．モヤル積に似せて変形を行うために，任意の微分演算子 D に対して右微分，左微分を以下のように定義する．

$$\overrightarrow{D}\Phi=D\Phi,\qquad \Phi\overleftarrow{D}=(-1)^{\mathcal{P}_D(\mathcal{P}_\Phi+1)}\overrightarrow{D}\Phi \tag{4.87}$$

ただし，$\mathcal{P}_\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}$ のパリティを表し，$\mathcal{O}_{\text{odd}}$ がフェルミオニックな量ならば $\mathcal{P}_{\mathcal{O}_{\text{odd}}}=1$, また $\mathcal{O}_{\text{even}}$ がボゾニックな量ならば $\mathcal{P}_{\mathcal{O}_{\text{even}}}=0$ を与えるものとする．つまり微分演算子 D が超対称共変微分演算子や超対称変換の生成子のようにフェルミオニックな微分演算子であれば $\mathcal{P}_D=1$ となる．また符号付ライプニッツ則 (G. Leibniz) が

$$\begin{aligned}\overrightarrow{D}(\Phi\Psi)&=\overrightarrow{D}(\Phi)\Psi+(-1)^{\mathcal{P}_D\mathcal{P}_\Phi}\Phi\overrightarrow{D}(\Psi)\\(\Phi\Psi)\overleftarrow{D}&=\Phi(\Psi)\overleftarrow{D}+(-1)^{\mathcal{P}_D\mathcal{P}_\Psi}(\Phi)\overleftarrow{D}\Psi\end{aligned} \tag{4.88}$$

で与えられる．

次に超空間の2通りの非反交換量子変形に必要となるポアッソン括弧を2種

類用意する．

（1） 超対称ポアッソン括弧 $\{\ ,\ \}_1$：超対称共変微分 D_α を用いて以下のように定義する．

$$\{\Phi,\Psi\}_1 = P^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Psi + P^{\alpha\beta}\Phi\overleftarrow{D}_\alpha\overrightarrow{D}_\beta\Psi + \partial_\mu\Phi P^{\mu\alpha}\overrightarrow{D}_\alpha\Psi + \Phi\overleftarrow{D}_\alpha P^{\alpha\mu}\partial_\mu\Psi \tag{4.89}$$

ここで $P^{\mu\nu}$ は反対称，$P^{\alpha\beta}$ は対称，$P^{\mu\alpha} = -P^{\alpha\mu}$ となるものである．このポアッソン括弧のヤコビ律は符号付で定義されることに注意されたい．

（2） non-SUSY ポアッソン括弧 $\{\ ,\ \}_3$ [7]：これは上のポアッソン括弧 $\{\ ,\ \}_1$ の超対称共変微分 D の代わりに超対称生成演算子 Q と置き換えて得られるポアッソン括弧である．

$$\{\Phi,\Psi\}_3 = P^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Psi + P^{\alpha\beta}\Phi\overleftarrow{Q}_\alpha\overrightarrow{Q}_\beta\Psi + \partial_\mu\Phi P^{\mu\alpha}\overrightarrow{Q}_\alpha\Psi + \Phi\overleftarrow{Q}_\alpha P^{\alpha\mu}\partial_\mu\Psi \tag{4.90}$$

こちらのポアッソン括弧で得られる非反可換変形がサイバーグなどが議論したスター積（★積）の変形に対応していて，グラヴィフォトン背景の超弦理論に関係がつく．これらのポアッソン括弧を使って非反可換な積を次に定義しよう．

SUSY$*$積 ：$\{\ ,\ \}_1$ で変形

$*$積は変形の 1 次がポアッソン括弧で与えられ，結合則が成立するように定義する．

$$\Phi * \Psi = e^P(\Psi,\Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(\Phi,\Psi) \tag{4.91}$$

$P^n(\Phi,\Psi)$ の定義は

$$\sum \frac{(-1)^{\rho^{B_1,\ldots,B_n}_{A_1,\ldots,A_n}}}{n!}\Phi\overleftarrow{D}_{A_1}\ldots\overleftarrow{D}_{A_n}P^{A_1B_1}\ldots P^{A_nB_n}\overrightarrow{D}_{B_n}\ldots\overrightarrow{D}_{B_1}\Psi$$

---

[7] $\{\ ,\ \}_3$ の添字が 2 ではなく 3 なのは，[49] の中では他にもポアッソン括弧が導入されていたためで，記号をそれらにあわせたためである．

で与える．ただし $\rho^{B_1,\ldots,B_n}_{A_1,\ldots,A_n}$ は，(4.87) 式で用いたパリティ$\mathcal{P}_{\mathcal{O}}$ を用いて $\rho^{B_1,\ldots,B_n}_{A_1,\ldots,A_n}$ $=\sum_{i=1}^{n-1}(\mathcal{P}_{A_i}+\mathcal{P}_{B_i})\sum_{j=i+1}^{n}\mathcal{P}_{A_j}$ とした．また添字 A_i, B_i は時空ベクトルの添字 (μ など) とスピノルの添字 (α など) の両方を含んでいる．

P^{AB} が定数，つまり $D_C P^{AB}=0$ とすることでモヤル積の場合と同じように結合則 $\Phi*(\Psi*X)=(\Phi*\Psi)*X$ が成立することが確かめられる．

特によく調べられている理論は，簡単のため $P^{\alpha\beta}\neq 0$, その他の $P^{\mu\nu}$, $P^{\alpha\mu}$, $P^{\mu\alpha}$ を 0 とする場合である．なぜこの場合が簡単かというと，超対称共変微分はフェルミオニックな微分演算子なので最高でもその成分の数と同じ階数の微分までしか出てこないのである．つまり 4 次元の場合は超対称共変微分は 2 成分だったので 3 回以上演算すると 0 になってしまう．つまり $D_\alpha D_\beta D_\gamma=0$ なので **$*$ 積が有限で止まる**という著しい特徴が現れるのだ．その結果 SUSY$*$ 積はあらわに書き下すことができ

$$\begin{aligned}\Phi*\Psi &= \Phi\cdot\Psi + P^{\alpha\beta}\Phi\overleftarrow{D}_\alpha\overrightarrow{D}_\beta\Psi + \frac{1}{4}\det P\Phi\overleftarrow{D}^2\overrightarrow{D}^2\Psi \\ &= \Phi\cdot\Psi - P^{\alpha\beta}D_\alpha\Phi D_\beta\Psi - \frac{1}{4}\det P D^2\Phi D^2\Psi\end{aligned}$$

となる．さらに注意しなくてはいけないのは，SUSY$*$ 積により非反可換化することにより，フェルミオニック座標が非反可換 ($\{\theta_1,\theta_2\}\neq 0$) になることはもちろんのことながら，同時にボゾニックな通常の座標も非可換 ($[x_\mu,x_\nu]\neq 0$) になっていることである．

また，積に超対称共変微分演算子 D_α を用いることで，$\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ のライプニッツ則は成立しないことになる．したがってカイラル超場を用いて超対称性理論を構築していても，カイラル超場同士の SUSY$*$ 積はカイラル超場にはならないのである．つまり SUSY$*$ 積のもとでカイラル超場の集合は環をなさない．しかし半分の超対称性については，積がカイラル超場としてみなせなくても，それぞれの場に演算すると不変であるのだから不変のままである．したがって超対称性理論の SUSY$*$ 積による変形は半分の超対称性を保ち 1/2 SUSY となる．

non-SUSY⋆ 積：$\{\ ,\ \}_3$ で変形する非反可換変形

上の SUSY∗ 積の中に現れる超対称共変微分演算子 D_α の代わりに，超対称生成演算子 Q_α で置き換えると得られる．性質はおおよそ SUSY∗ 積による変形とよく似ている．Q_α を使って変形したためカイラリティーは明らかに保たれる．カイラル超場を定義する超対称共変微分演算子 $D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}$ と Q_α が可換であるからである．しかしやはり超対称が半分破れる．これはむしろ直接的に超対称代数自体が ⋆ 積では壊れてしまうのだ．というのは (4.83) で見たように Q と $\bar{Q}$ はもともと反交換しないからだ．その結果，もともと反交換していた $\bar{Q}$ 同士の反交換関係が壊れて

$$\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\}_\star = -2P^{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma^\nu_{\beta\dot{\beta}}\frac{\partial^2}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \tag{4.92}$$

と変形を受ける．こうしてあらわに $\bar{Q}$ の対称性が壊れ，Q の対称性が残るという 1/2 SUSY となる．

こういった非反交換な変形をする場の理論が現在も精力的に研究されている．非可換積が有限な次数で止まるという著しい特徴により，ある意味では通常の非可換変形よりも簡単に済む場合が多い．しかし研究が盛んになってからまだ間が無いのでまだまだ未開の分野であり，今後どういった路線の研究が重要になってくるかはわからない．ここでは，以上の入り口の紹介だけにとどめることにして章を終わりとする．

付録　4 次元の複素座標

この章で用いた複素座標を用いたゲージ場とゲージ曲率についてまとめておく．

実 4 次元の複素座標の組 z_1, z_2 を以下のように組む．

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + ix^2), & \bar{z}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x^1 - ix^2) \\ z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x^3 + ix^4), & \bar{z}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x^3 - ix^4) \end{cases} \tag{4.93}$$

微分演算子

$$\begin{cases} \partial_{z_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 - i\partial_2), & \partial_{\bar{z}_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 + i\partial_2) \\ \partial_{z_2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\partial_3 - i\partial_4), & \partial_{\bar{z}_2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\partial_3 + i\partial_4) \end{cases} \tag{4.94}$$

ゲージ場

$$\begin{cases} A_{z_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(A_1 - iA_2), & A_{\bar{z}_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(A_1 + iA_2) \\ A_{z_2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(A_3 - iA_4), & A_{\bar{z}_2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(A_3 + iA_4) \end{cases} \tag{4.95}$$

ゲージ曲率

$$F_{z_1 z_1} = F_{z_2 z_2} = F_{\bar{z}_1 \bar{z}_1} = F_{\bar{z}_2 \bar{z}_2} = 0$$

$$F_{z_1 \bar{z}_1} = iF_{12} = \partial_{z_1} A_{\bar{z}_1} - \partial_{\bar{z}_1} A_{z_1} + [A_{z_1}, A_{\bar{z}_1}]$$

$$F_{z_2 \bar{z}_2} = iF_{34} = \partial_{z_2} A_{\bar{z}_2} - \partial_{\bar{z}_2} A_{z_2} + [A_{z_2}, A_{\bar{z}_2}]$$

$$F_{z_1 z_2} = \frac{1}{2}F_{13} + \frac{1}{2i}F_{14} + \frac{1}{2i}F_{23} - \frac{1}{2}F_{24} = \partial_{z_1} A_{z_2} - \partial_{z_2} A_{z_1} + [A_{z_1}, A_{z_2}]$$

$$F_{z_1 \bar{z}_2} = \frac{1}{2}F_{13} - \frac{1}{2i}F_{14} + \frac{1}{2i}F_{23} + \frac{1}{2}F_{24} = \partial_{z_1} A_{\bar{z}_2} - \partial_{\bar{z}_2} A_{z_1} + [A_{z_1}, A_{\bar{z}_2}]$$

$$F_{\bar{z}_1 z_2} = \frac{1}{2}F_{13} + \frac{1}{2i}F_{14} - \frac{1}{2i}F_{23} + \frac{1}{2}F_{24} = \partial_{\bar{z}_1} A_{z_2} - \partial_{z_2} A_{\bar{z}_1} + [A_{\bar{z}_1}, A_{z_2}]$$

$$F_{\bar{z}_1 \bar{z}_2} = \frac{1}{2}F_{13} - \frac{1}{2i}F_{14} - \frac{1}{2i}F_{23} - \frac{1}{2}F_{24} = \partial_{\bar{z}_1} A_{\bar{z}_2} - \partial_{\bar{z}_2} A_{\bar{z}_1} + [A_{\bar{z}_1}, A_{\bar{z}_2}]$$

$$F_{12} = -iF_{z_1 \bar{z}_1}$$

$$F_{13} = \frac{1}{2}(F_{z_1 z_2} + F_{z_1 \bar{z}_2} + F_{\bar{z}_1 z_2} + F_{\bar{z}_1 \bar{z}_2})$$

$$F_{14} = \frac{i}{2}(F_{z_1 z_2} - F_{z_1 \bar{z}_2} + F_{\bar{z}_1 z_2} - F_{\bar{z}_1 \bar{z}_2})$$

$$F_{23} = \frac{i}{2}(F_{z_1 z_2} + F_{z_1 \bar{z}_2} - F_{\bar{z}_1 z_2} - F_{\bar{z}_1 \bar{z}_2})$$

$$F_{24} = -\frac{1}{2}(F_{z_1 z_2} - F_{z_1 \bar{z}_2} - F_{\bar{z}_1 z_2} + F_{\bar{z}_1 \bar{z}_2})$$

$$F_{34} = -iF_{z_2 \bar{z}_2}$$

自己双対

$$
\begin{aligned}
&F^+_{\mu\nu} = *F^+_{\mu\nu}\\
&F^+_{12} = F^+_{34} \Longrightarrow F^+_{z_1\bar{z}_1} = F^+_{z_2\bar{z}_2}\\
&\left.\begin{aligned}
&F^+_{13} = -F^+_{24} \Longrightarrow F^+_{z_1\bar{z}_2} + F^+_{\bar{z}_1 z_2} = 0\\
&F^+_{14} = F^+_{23} \quad\ \Longrightarrow F^+_{z_1\bar{z}_2} - F^+_{\bar{z}_1 z_2} = 0
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow F^+_{z_1\bar{z}_2} = F^+_{\bar{z}_1 z_2} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
F^+_{z_1\bar{z}_1} = F^+_{z_2\bar{z}_2} = iF^+_{12}\\
F^+_{z_1 z_2} = \dfrac{1}{2}(F^+_{13} - iF^+_{14})\\
F^+_{\bar{z}_1\bar{z}_2} = \dfrac{1}{2}(F^+_{13} + iF^+_{14})
\end{cases}
\tag{4.96}
$$

反自己双対

$$
\begin{aligned}
&F^-_{\mu\nu} = -*F^-_{\mu\nu}\\
&F^-_{12} = -F^-_{34} \Longrightarrow F^-_{z_1\bar{z}_1} = -F^-_{z_2\bar{z}_2}\\
&\left.\begin{aligned}
&F^-_{13} = F^-_{24} \quad\ \Longrightarrow F^-_{z_1 z_2} + F^-_{\bar{z}_1\bar{z}_2} = 0\\
&F^-_{14} = -F^-_{23} \Longrightarrow F^-_{z_1 z_2} - F^-_{\bar{z}_1\bar{z}_2} = 0
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow F^-_{z_1 z_2} = F^-_{\bar{z}_1\bar{z}_2} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
F^-_{z_1\bar{z}_1} = -F^-_{z_2\bar{z}_2} = iF^-_{12}\\
F^-_{z_1\bar{z}_2} = \dfrac{1}{2}(F^-_{13} + iF^-_{14})\\
F_{\bar{z}_1 z_2} = \dfrac{1}{2}(F^-_{13} - iF^-_{14})
\end{cases}
\tag{4.97}
$$

第 5 章

非可換空間と $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論

ここまでの章では，ゲージ場の理論を用いた非摂動効果と幾何学に関係の深い話題をいくつか紹介してきた．一つは双対性と位相的場の理論であり，もう一つは非可換空間上のインスタントンとトポロジカルチャージについてである．この章は，それらを融合し非可換空間上で位相的場の理論を構築することで何ができるのか，ということに関する話題を扱う．一つの成功例としてネクラソフの公式の導出をこの章で紹介する．ネクラソフの公式によって，双対性を用いることなくサイバーグ-ウィッテンのプレポテンシャルを計算することが可能になった．この章では少し詳しくこの公式について見ていく．

5.1 非可換変形とコホモロジカル位相的場の理論

代数的な方法を用いるのが非可換空間を位相的に分類する主要な方法である．その観点では非可換多様体は，変形前の多様体とは位相的に非常に異なる対象としてとらえられる．しかし一方で，例えば非可換トーラスにおいて形式的に定義されたオイラー数が非可換パラメータ θ（ただし，$[x^\mu, x^\nu]=i\theta^{\mu\nu}$ としている）に依存せず可換な位相空間の通常のトーラスのオイラー数と変わりないことが知られている．他にも，一般に非可換パラメータに依存しない不変量が存在することが予測されている．前章の非可換ユークリッド空間上のインスタントン数もし

かりであった．

そこで最初に，非可換ユークリッド空間上で定義された位相的場の理論の分配関数が，解析的な場合に限るが，非可換パラメータに依存しないことを示し，幾何学的な性質を非可換パラメータによらず保存する不変量であることを示す．つまり可換空間のトポロジカルな量はある程度は非可換空間に持ち込めそうだということを，位相的場の理論でもみてみるのがこの節の目的である．

5.1.1　非可換空間のコホモロジカル位相的場の理論

この節では位相的場の理論が非可換変形に対して不変であることを見てみよう [50]．変形量子化による非可換多様体を対象にするので，以下ではポアッソン多様体上の場の理論を考える．$*$ 積で非可換化されている空間では，非可換パラメータの 1 次の項はポアッソン括弧 $\{\ ,\}_\theta$ となるように変形されていた．

$$\phi_1 * \phi_2 = \phi_1\phi_2 + \frac{1}{2}\{\phi_1,\phi_2\}_\theta + (\theta\text{の高次の項}) \tag{5.1}$$

ϕ_i $(i=1,2)$ はポアッソン多様体をベースとするベクトル束の切断である．$\{\ ,\}_\theta$ の添字 θ は非可換パラメータ θ を明示して書いたものである．例えば，前章で使われていた $\mathbb{R}^{2n}$ の非可換変形に用いられたモヤル積の場合はポアッソン括弧は

$$\{\phi_1,\phi_2\}_\theta = \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi_1\partial_\nu\phi_2 - \partial_\mu\phi_2\partial_\nu\phi_1) \tag{5.2}$$

で定義され $\theta^{\mu\nu}$ は定数の反対称行列であった．次の議論では $*$ はモヤル積に限らず一般のポアッソン多様体上の $*$ 積で成立するが，特にそういった事実が後で必要になるわけではないので，気にせずモヤル積と思って読み進めてもかまわない．

$*$ 積で非可換変形されたポアッソン多様体上のコホモロジカル位相的場の理論を考える．マタイ-キレン形式のところで見たように BRS-完全 (exact) な作用 $\hat{\delta}V$ で作用を定義していた．その場合，分配関数や期待値は BRS 作用素 $\hat{\delta}$ と可換または反可換な任意の無限小変換 δ' に対する不変量であった．

$$\begin{aligned}
&\hat{\delta}\delta' = \pm\delta'\hat{\delta}\\
&\delta' Z_\theta = \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\chi\mathcal{D}H\,\delta'\left(-\int dx^D\,\hat{\delta}V\right)\,\exp(-S_\theta)\\
&\qquad = \pm\int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\chi\mathcal{D}H\,\hat{\delta}\left(-\int dx^D\,\delta' V\right)\,\exp(-S_\theta) = 0
\end{aligned} \tag{5.3}$$

ここで非可換パラメータ θ（一般には座標依存性があってよい）の無限小変形を引き起こす作用素 δ_θ を導入しよう．

$$\delta_\theta \theta^{\mu\nu} = \delta\theta^{\mu\nu} \tag{5.4}$$

ここで $\delta\theta^{\mu\nu}$ は無限小の反対称 2 形式の成分である．θ 依存性をあらわにするため，$*$ 積を $*_\theta$ と以下では書くことにする．$*_\theta$ に対して，δ_θ の作用は形式的に

$$\delta_\theta *_\theta = *_{\theta+\delta\theta} - *_\theta \tag{5.5}$$

と書ける．3 章にならって，一般の場を ϕ_i とし，その BRS 変換を $\hat{\delta}\phi_i = \psi_i$, $\hat{\delta}\psi_i = 0$ とする．また P_{ϕ_i} は ϕ_i のパリティ（ボゾンは 0 でフェルミオンは 1) を与えるものとおく．BRS 作用素 $\hat{\delta}$ と非可換パラメータの変形 δ_θ が可換であることは以下のように確かめることができる．

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}\delta_\theta(\phi_1 *_\theta \phi_2) &= \hat{\delta}(\phi_1 *_{\theta+\delta\theta} \phi_2 - \phi_1 *_\theta \phi_2) \\
&= (\psi_1 *_{\theta+\delta\theta} \phi_2 + (-1)^{P_{\phi_1}} \phi_1 *_{\theta+\delta\theta} \psi_2) \\
&\quad - (\psi_1 *_\theta \phi_2 + (-1)^{P_{\phi_1}} \phi_1 *_\theta \psi_2) \\
&= \delta_\theta (\psi_1 *_\theta \phi_2 + (-1)^{P_{\phi_1}} \phi_1 *_\theta \psi_2) \\
&= \delta_\theta \hat{\delta}(\phi_1 *_\theta \phi_2)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

このことから，非可換空間上のコホモロジカル位相的場の理論は非可換パラメータの変形に対して，滑らかに変形される限り，不変となっていることがわかる．

しかしこの証明は BRS 変換の定義に $*$ 積が現れない場合に限ることを注意する必要がある．つまりゲージ理論の BRS 変換のように，定義に $*$ 積が含まれてしまうものにはこの素朴な議論では不十分である．例えば (3.53) のなかの $\hat{\delta}\psi_\mu = D_\mu\phi$ は，非可換空間においては $D_\mu * \phi = \partial_\mu\phi + iA_\mu * \phi$ と変形され，BRS 変換の前に非可換パラメータを変形したものと，BRS 変換後に非可換変形したものでは結果が異なってしまう．こうした事情を踏まえると，一見位相的ゲージ理論の場合には非可換パラメータに依存するように思われる．

しかし，実はゲージ理論の場合も非可換ユークリッド空間では非可換パラメータの変形によらないことを確かめることができる．それを $\mathcal{N}=2$ の 4 次元非可換ユークリッド空間上の超対称ゲージ理論の場合に対して証明しよう．一般性を失わずに座標変換で次のように非可換パラメータをとることができる．

$$(\theta^{\mu\nu})=\bigoplus_{i=1}^{2}\varepsilon^{2i-1,2i}\theta^i=\begin{pmatrix}0&\theta^1&0&0\\-\theta^1&0&0&0\\0&0&0&\theta^2\\0&0&-\theta^2&0\end{pmatrix} \tag{5.7}$$

$\varepsilon^{2i-1,2i}$ は反対称テンソルで $\varepsilon^{2i-1,2i}=-\varepsilon^{2i,2i-1}=1$, 非可換パラメータの変形は

$$\theta^i\longrightarrow\theta^i+\delta\theta^i$$

についてのみ考える．ここではモヤル積を使わずオペレーター形式を用いて議論することにする．オペレーターが作用するヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ で書くことにする．前章でみたように微分作用素 ∂_μ は交換関係 $-i\theta^{-1}_{\mu\nu}[x^\nu,\,*]\equiv[\hat{\partial}_\mu,*]$ を用いて表され，空間積分 $\int d^{2D}x$ は $\det(\theta)^{1/2}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}$ で表される．したがって非可換パラメータの変形は，$-i\theta^{-1}_{\mu\nu}[x^\nu,\ ]$ と $\det(\theta)^{1/2}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}$ を $-i(\theta+\delta\theta)^{-1}_{\mu\nu}[x^\nu,\ ]$ と $\det(\theta+\delta\theta)^{1/2}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}$ にそれぞれ置き換えることに対応している．

非可換 $\mathbb{R}^4$ 上のトポロジカルツイストされた $\mathcal{N}=2$ ヤン-ミルズ理論を考えてみよう（3.5 節参照）．簡単のため，$\theta^1=\theta^2=\theta$ とする．$(A_\mu,H^+_{\mu\nu},\bar{\phi},\phi)$ のボゾン場と $(\psi_\mu,\chi^+_{\mu\nu},\eta)$ のフェルミオン場で構成されていた．BRS 変換は

$$\begin{aligned}&\hat{\delta}A_\mu=\psi_\mu,\quad \hat{\delta}\chi^+_{\mu\nu}=H^+_{\mu\nu}\\&\hat{\delta}\psi_\mu=D_\mu\phi,\quad \hat{\delta}H^+_{\mu\nu}=i[\chi^+_{\mu\nu},\phi]\\&\hat{\delta}\phi=0,\quad \hat{\delta}\bar{\phi}=\eta,\quad \hat{\delta}\eta=i[\bar{\phi},\phi]\end{aligned} \tag{5.8}$$

で定義され，共変微分は $D_\mu\ f:=[\hat{\partial}_\mu+iA_\mu,\ f\ ]$ であった．4 次元非可換ユークリッド空間をフォック空間を使って表すと場は $A_\mu=\sum A_\mu{}^{n_1n_2}_{m_1m_2}|n_1,n_2\rangle\langle m_1,m_2|$, $\psi_\mu=\sum\psi_\mu{}^{n_1n_2}_{m_1m_2}|n_1,n_2\rangle\langle m_1,m_2|$ のように無限次元行列で表現される．BRS 変換も

$$\hat{\delta}A_{\mu}{}^{n_1 n_2}_{m_1 m_2} = \psi_{\mu}{}^{n_1 n_2}_{m_1 m_2}, \cdots \tag{5.9}$$

のように，行列の変換で書かれる．ラグランジアンを定義するのに用いられていたゲージフェルミオンは

$$\begin{aligned} \Psi &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\mathrm{tr}\left[2\chi^{+}_{\mu\nu}(-iF^{+\mu\nu}+\frac{1}{2}H^{+\mu\nu})\right] \\ \Psi_{\mathrm{proj}} &= -\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\mathrm{tr}[\bar{\phi}D_{\mu}\psi^{\mu}] \end{aligned} \tag{5.10}$$

であったので作用は

$$\begin{aligned} S &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\ \mathrm{tr}L(A_{\mu},\cdots;\hat{\partial}_{z_i},\hat{\partial}_{\bar{z}_i}) \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\mathrm{tr}\hat{\delta}(\Psi+\Psi_{\mathrm{proj}}) \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\mathrm{tr}\Big(F^{+2}-4i\chi^{+\mu\nu}D_{\mu}\psi_{\nu}-\eta D_{\mu}\psi^{\mu}+i\phi\{\chi^{+}_{\mu\nu},\chi^{+\mu\nu}\} \\ &\quad -i\bar{\phi}\{\psi_{\mu},\psi^{\mu}\}-\bar{\phi}D_{\mu}D^{\mu}\phi\Big) \end{aligned} \tag{5.11}$$

と書かれる．ただし tr はゲージ群に対するトレースであることに注意．$\det(\theta)^{1/2}$ がオーバーオールにかかる因子で存在するが省略した．

次に以下のような変数変換を考えてみよう．

$$\begin{aligned} &A_{\mu}\to\frac{1}{\sqrt{\theta}}\tilde{A}_{\mu}, \quad \psi_{\mu}\to\frac{1}{\sqrt{\theta}}\tilde{\psi}_{\mu}, \quad \bar{\phi}\to\frac{1}{\theta}\tilde{\bar{\phi}}, \quad \eta\to\frac{1}{\theta}\tilde{\eta} \\ &\chi^{+}_{\mu\nu}\to\frac{1}{\theta}\tilde{\chi}^{+}_{\mu\nu}, \quad H^{+}_{\mu\nu}\to\frac{1}{\theta}\tilde{H}^{+}_{\mu\nu}, \quad \phi\to\tilde{\phi} \end{aligned} \tag{5.12}$$

このような変換のもとで経路積分では非自明なヤコビアンは生じないことに注意されたし．BRS パートナーが同じ変換をするので，ボゾンとフェルミオンで出てくるヤコビアンが逆のために相殺するからだ．この変数変換のもと作用が

$$\begin{aligned} &S\longrightarrow\frac{1}{\theta^2}\tilde{S} \\ &L(A_{\mu},\cdots;\hat{\partial}_{z_i},\hat{\partial}_{\bar{z}_i})\longrightarrow\frac{1}{\theta^2}L(\tilde{A}_{\mu},\cdots;-a_i^{\dagger},a_i) \end{aligned} \tag{5.13}$$

のように書き換わる．ここで変換前の矢印の左側は θ に依存している．例えば微分作用が $\partial_{z_i}=-\sqrt{\theta^{-1}}[a_i^{\dagger},\ ]$ であるからだ．

一方で変換後の右側の作用 $\tilde{S}$ は θ を全てくくりだせているので θ に依存しな

い．3 章で観測量が結合定数に依存しないことを見たように，ウィッテンタイプの位相的場の理論は作用の大外にかかっているパラメータに依存しない．例えば分配関数は，$\delta_\theta Z = -2(\delta\theta)\theta^{-3}\langle\tilde{S}\rangle = 0$ である．こうして様々な計算をする上で，θ を都合の良い値にえらんで計算することが可能であることが示された．

次に非可換パラメータの変形の議論をモヤル積で定義された非可換ユークリッド空間の場合に限定すると，どのようなことが言えるか考えてみよう．特徴を明確にするために座標のスケールを変換する δ_s を

$$x'^\mu = x^\mu - \delta_s x^\mu \tag{5.14}$$

$$\delta_s x^\mu = \left(\frac{1}{2}\delta\theta^{\mu\nu}(\theta^{-1})_{\nu\rho}\right)x^\rho \tag{5.15}$$

で，

$$(1-\delta_s)[x^\mu, x^\nu] = [x'^\mu, x'^\nu] = i(\theta^{\mu\nu} - \delta\theta^{\mu\nu}) \tag{5.16}$$

を満たすものとして導入する．変換行列は

$$J^\mu_\rho \equiv \delta^\mu{}_\rho + \frac{1}{2}\delta\theta^{\mu\nu}(\theta^{-1})_{\nu\rho} \tag{5.17}$$

であり，積分測度は

$$dx^D = \det J dx'^D, \qquad \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (J^{-1})_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu} \tag{5.18}$$

となる．$\det J$ はヤコビアンだ．これら新しい変数を用いてモヤル積を書き直すと

$$(1-\delta_s)(*_\theta) = \delta_s\left(\exp\left(\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial}_\mu(\theta-\delta\theta)^{\mu\nu}\overrightarrow{\partial}_\nu\right)\right) = *_{\theta-\delta\theta} \tag{5.19}$$

である．単に変数変換をしているだけなのでこれ自体は理論を何も変えていない．作用を古い変数と新しい変数両方で書き表すと

$$\begin{aligned} S_\theta &= \int dx^D L(*_\theta, \partial_\mu) \\ &= \int \det J dx'^D L\left(*_{\theta-\delta\theta}, (J^{-1})^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\right) \end{aligned} \tag{5.20}$$

となる．$L(*_\theta, \partial_\mu)$ はラグランジアンの中に現れるモヤル積と，モヤル積以外に現れる微分作用素をあらわに書いたものである．繰り返すが，ここまでは変数変

換であり理論を変化させてはいない．次に非可換パラメータ θ を次のように変形する．

$$\theta \longrightarrow \theta' = \theta + \delta\theta \tag{5.21}$$

この変形は理論を変化させるが，先に見たとおりコホモロジカル位相的場の理論の分配関数は変化しない．変数変換 (5.14) と θ の変形 (5.21) を同時に行うと作用は次のようになる．

$$S_{\theta'} = \int \det J dx'^D L\left(*_\theta, (J^{-1})^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\right) \tag{5.22}$$

$L\left(*_\theta, (J^{-1})^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\right)$ はラグランジアンの中の積が $*_\theta$ であり，モヤル積以外に現れる微分作用素がもとのラグランジアンでは $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ であったものが $(J^{-1})^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu}$ で置き換えられていることを示している．つまり，(5.22) は θ 変形がモヤル積 $*_\theta$ を固定したまま，x を δ_s でスケールを取り直したものと同値であることがわかる．

例えば $\theta \to \infty$ の極限を考えると，微分を含む運動項を無視して相互作用項だけの理論に帰着されることがわかる．というのも，$\theta^{\mu\nu} \to \infty$ は $\det J \to \infty$ を意味するが，微分演算子は 0 に近づく．微分を含む項があまり重要でないということは，作用の中で重要なのは相互作用を表す部分ということだ．相互作用は微分を含まない項だけならば多項式で与えられるので，場を ϕ_i で表すことにすると

$$V(\phi_i) = \sum c^{i\cdots j}\phi_i \cdots \phi_j$$

のように与えられる．力学変数は作用素で表すと無限次元の行列であったが，時空が $2D$ 次元ならばフォック空間のテンソル積で $|n_1, \cdots, n_D\rangle$ の表現をもつ行列で表される．しかし，何かある観測量 O の経路積分

$$\int \prod_i \mathcal{D}\phi_i \; O \exp -V(\phi_i)$$

の計算をするとき，$|n_1, \cdots, n_D\rangle$ の表現をもつ行列で計算しても，次元が 2 次元低いテンソル積が $|n_1, \cdots, n_{D-1}\rangle$ であるものを計算しても，どちらも無限次元行列の積分であることから計算結果は変わらない．

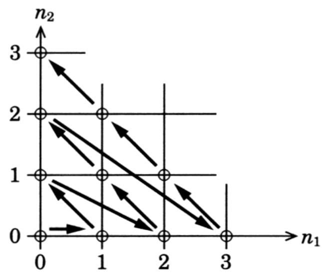


図 **5.1**　$(0,0)\mapsto 0, (1,0)\mapsto 1, (0,1)\mapsto 2, \cdots$ と矢印の順に n が増える．

簡単な例として非可換 $\mathbb{R}^4$ のフォック状態 $|n_1,n_2\rangle$ と $\mathbb{R}^2$ のフォック状態 $|n\rangle$ を考えてみる．n, n_1, n_2 は非負整数，$n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, (n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ である．

$$(n_1,n_2)\longmapsto\frac{(n_1+n_2)(n_1+n_2+1)}{2}+n_2=n$$

でそれらを対応付けると $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ は 1 対 1 で対応することがわかる（図 5.1 参照）．したがって例えば非可換 $\mathbb{R}^2$ 上の

$$A=\sum_{n,m}|n\rangle A_{nm}\langle m|,\qquad B=\sum_{n,m}|n\rangle B_{nm}\langle m|$$

の積の積分 $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{2\mathrm{dim}}}AB$ を考えると

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{2\mathrm{dim}}}AB=\sum_{n,m}A_{nm}B_{mn}=\sum_{(n_1,n_2)}\sum_{(m_1,m_2)}A_{(n_1,n_2)(m_1,m_2)}B_{(m_1,m_2)(n_1,n_2)} \tag{5.23}$$

$$=\sum_{(n_1,n_2)}\langle n_1,n_2|AB|n_1,n_2\rangle=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{4\mathrm{dim}}}AB \tag{5.24}$$

である．つまり非可換 $\mathbb{R}^4$ の $A=\sum_{(n_1,n_2)}\sum_{(m_1,m_2)}|n_1,n_2\rangle A_{(n_1,n_2)(m_1,m_2)}\langle m_1,m_2|$ と $B=\sum_{(n_1,n_2)}\sum_{m_1,m_2}|n_1,n_2\rangle B_{(n_1,n_2)(m_1,m_2)}\langle m_1,m_2|$ の積の積分 $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{4\mathrm{dim}}}AB$ と区別がつかないのである．

$\mathrm{Tr}\,AB$ に限らず多項式 $V(\phi_i)$ に対しても事情は同じである．結果として，非可換ユークリッド空間上のコホモロジカル位相的場の理論では，ある側面では次

元によらない理論であるという面白い結果が得られる．

この性質を使うと，非可換空間上のコホモロジカル位相的場の理論の計算が極端に簡単になることがある．例えば，均衡化された (Balanced) スカラー理論のコホモロジカル位相的場の理論がポテンシャル項の計算だけで評価でき，分配関数をグラスマン多様体のオイラー数で計算できることが知られている [50]．

また，ユークリッド空間上の $\mathcal{N}=2$ の超対称ゲージ理論に適応すると，サイバーグ-ウィッテンモノポール方程式が ADHM 方程式となるなど微分項が落ちて行列模型で定義される．このことは次の節で説明されるネクラソフの公式の計算の理解にも深く関係していると予想される．ただし本書ではこの事実に関する詳細は紹介しない．また，理論が非可換パラメータに依存しないことの証明は形式的なもので，実際に適応可能かどうかは，それぞれの理論の作用に現れる相互作用項を重みとしたときに経路積分が収束し定義されることを確認する必要がある．

非可換ユークリッド空間上でコホモロジカル位相的場の理論が非可換パラメータに依存しないことから，可換空間上の分配関数の計算を非可換空間上に置き換えて計算することができる．このことを用いてネクラソフの公式について次の節で調べてみよう．

5.2 ネクラソフの公式

以下では 4 次元のゲージ群が $U(N)$ あるいはトレース部分の $U(1)$ を除いた $SU(N)$ の場合の $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論の，ある種の分配関数を計算することにする．それを用いることで，サイバーグ-ウィッテンが周期積分を用いて求めたプレポテンシャルを求めることができるのである．2 章でみたサイバーグ-ウィッテンの方法はアクロバティックであった．

一方，この章でみるネクラソフの公式の方法は誠実に物理学者的なアプローチを貫いている感じを受ける．実際にネクラソフの公式として呼ばれているが，ドレイ (N. Dorey), ホロウッズ (T. Hollowood), コーズ (V.V. Khoze), マティス (M.P. Mattis), ベッリサイ (D. Bellisai), フチート (F. Fucito), タンジーニ (A. Tanzini), トゥラヴァリーニ (G. Travaglini), モラレス (J. Morales) 等々，多くの物理学者たちが少しずつ進化させてきた積み重ねの最後の 1 ピースを（しかし

非常に難しい1ピースを）はめたのがネクラソフというのが正しい認識であろう．ゲージ理論の非摂動論について論じてきた本書の最後を締めくくるのにふさわしいテーマであるから，非常に丁寧に計算をフォローしていくことにしよう．

5.2.1　インスタントン計量

3章で見たように，コホモロジカル位相的場の理論の分配関数は一般にモジュライ空間の積分に帰着される．$\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論のトポロジカルツイストした理論の分配関数を計算するとどうなるであろうか．この分配関数はインスタントン数についての足し上げになる．

$$Z=\sum_k q^k Z_k$$

ここで q は結合定数で書かれる定数，k はインスタントン数で Z_k は k でラベルされている分配関数である．ユークリッド空間でインスタントン数が k のインスタントンモジュライ空間は，ゲージ群が $U(N)$ の場合はよく知られているように $4kN$ 次元である．モジュライ空間が0次元でない場合はいつもフェルミオンのゼロモードのために分配関数が0になることを3章でみた．

この章ではこのゼロモードを取り除いた部分を“分配関数”と呼び，計算することにする．なぜこのようなことをするかというと，実際にサイバーグ-ウィッテンのプレポテンシャルと比べるべき量がこのゼロモードを取り除いた分配関数だからである．それは例えばゼロモードを取り除くフェルミオンを観測量に含む n 点関数をプレポテンシャルを用いて表したものと，ゼロモードを取り除いて定義した分配関数を用いて表したものと比べることでわかる．後で，サイバーグ-ウィッテン理論との対応は見るのでここではこれ以上深入りすることはやめ，以下では単に「分配関数」と呼び計算の詳細を見ていくことにする．

Z_k を求めるためにインスタントンモジュライ空間の積分を実行するには，場の積分で考えるよりインスタントンモジュライ空間にふさわしい座標で考える方が得策である．4章で詳しく見たADHMデータを記述する (B_1,B_2,I,J) を用いることを次に考えよう．(B_1,B_2,I,J) を用いて積分を書くには，積分測度として何を用いるのが適当だろうか．もちろん場の経路積分から出発してそのヤコビアンを書き出すのが最もストレートな方法だが，それは難しいのでもう少し間

接的な方法を考えることにする．ヒントとしてインスタントンモジュライ空間が $\vec{\mu}:=(\mu_{\mathbf{R}},\mu_{\mathbf{C}})$ を運動量とするハイパーケーラー商で与えられることが一つあげられる．

$$\vec{\mu}^{-1}(\zeta)/U(k) \quad ただし \quad \vec{\mu}^{-1}(\zeta):=\mu_{\mathbf{R}}^{-1}(\zeta)\cap\mu_{\mathbf{C}}^{-1}(0) \tag{5.25}$$

さらにインスタントン数が k の場合に $U(k)$ 対称性があり，超対称性が残るべきであることなどを考慮すると，積分測度としてどういうものをとればいいか決まってくる．3.4 節で $\mathcal{A}$ と書いていたものに $\vec{\mu}^{-1}(\zeta)$ を対応させる（言い換えると切断 $s(\phi)$ のところに $\vec{\mu}(B_1,B_2,I,J)$ を適応する）ことによって得られる積分を考えればよいことが予想されるであろう．

本来はもう少し厳密な議論が必要だが長くなるのでこの事実を認め，考えるべきコホモロジカル位相的場の理論を作ることにする（詳しく知りたい読者は [51–53] を参照）．(B_1,B_2,I,J) は ADHM 構成の節で述べたように $k\times k,k\times k,k\times N,N\times k$ の複素行列である．その BRS パートナーとしてフェルミオニックな同じサイズの行列 $(\psi_{B1},\psi_{B2},\psi_I,\psi_J)$ を導入する．3.4 節の一般論に従い，$U(k)$ 対称性で割るのでその生成子に値をもつ反ゴースト η, 補助場 $\bar{\phi}$, 一般論で θ と書いたゲージ変換のパラメータに対応する ϕ を導入する．BRS 変換も一般論の通りに

$$\begin{aligned}
&\hat{\delta}B_i=i\psi_i, \quad \hat{\delta}\psi_i=i[B_i,\phi], \quad \hat{\delta}\phi=0\\
&\hat{\delta}\vec{\chi}=\vec{H}, \quad \hat{\delta}\vec{H}=-i[\phi,\vec{\chi}]\\
&\hat{\delta}\bar{\phi}=i\eta, \quad \hat{\delta}\eta=-i[\phi,\bar{\phi}]\\
&\hat{\delta}I=\psi_I, \quad \hat{\delta}J=\psi_J\\
&\hat{\delta}\psi_I=-i\phi I, \quad \hat{\delta}\psi_J=iJ\phi
\end{aligned} \tag{5.26}$$

で定義する．これらの行列を用いて理論を構成するわけだが，作用は 3 章の通り ADHM 方程式が BPS 方程式となるよう切断 s として $\vec{\mu}=(\mu_{\mathbf{R}}-\zeta\mathbf{1}_k,\mu_{\mathbf{C}})$ を選べばいい．それに対応してフェルミオニックな $\vec{\chi}:=(\chi_{\mathbf{R}},\chi_{\mathbf{C}})$ とその BRS パートナーでボゾニックな補助場の $\vec{H}:=(H_{\mathbf{R}},H_{\mathbf{C}})$ が $k\times k$ のエルミート行列と複素行列の組として導入されている．$\delta^{U(k)}_{(-\phi)}$ を用いて ϕ で生成される $U(k)$ 変換を表すと $\hat{\delta}^2=\delta^{U(k)}_{(-\phi)}$ であることに注意されたし．これらを用いて，作用も一般論に

従って以下で与える.

$$S = \mathrm{tr}\hat{\delta}(\Psi + \Psi_{\mathrm{proj}}) \tag{5.27}$$

$$\Psi = \vec{\chi}\cdot\{\vec{H} - i\vec{\mu}\}$$

$$\Psi_{\mathrm{proj}} = i[\phi, \bar{\phi}]\eta + i[B_i, \bar{\phi}]\psi_i + \{(iJ\bar{\phi}\psi_J^\dagger - i\psi_I^\dagger\bar{\phi}I) + h.c.\}$$

この作用のもと経路積分を行うと ADHM 方程式

$$\mu_{\mathbf{R}} = [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J = \zeta\mathbf{1}_k \tag{5.28}$$

$$\mu_{\mathbf{C}} = [B_1, B_2] + IJ = 0 \tag{5.29}$$

の解からの寄与が経路積分に主に効いてくることを思い出しておこう. $U(k)$ のゲージを適当に選ぶと, 分配関数は経路積分として

$$Z_k := \frac{1}{vol.\ U(k)}\int \mathcal{D}B_i\mathcal{D}I\mathcal{D}J\mathcal{D}\vec{\chi}\mathcal{D}\vec{H}\exp(-S) \tag{5.30}$$

で与えられるもので, これを評価したい. しかし, まだいくつかの問題がある. 上式 (5.28)(5.29) で定義された方程式あるいは作用 (5.27) にはさらにいろいろな対称性が存在する. 一つは $U(N)$ 対称性で, $U(N)$ のリー代数に値を持つパラメータ a を用いて

$$\delta^{U(N)}I = -iIa, \qquad \delta^{U(N)}J = iaJ \tag{5.31}$$

としても不変である. 他にも, 複素平面の回転に付随する $U(1)^2$ 対称性が存在している. こういった対称性があると, 次の節で解説する局所化公式などのコホモロジカル位相的場の理論の性質を生かした計算方法が使えない. したがって後で BRS 変換や作用を都合がよいものに変形する.

5.2.2 局所化公式

局所化公式を用いて分配関数の計算を実行したいのであるが, その前に同変コホモロジーと同変外微分の記法をまとめておく. $U(1)$ 作用のもとで不変な計量を持つ多様体上で, $U(1)$ 作用で生成されるベクトル場 X に対する同変外微分作用素を

$$\mathcal{D} := d + i\xi\ i_X \tag{5.32}$$

で定義する．ξ はパラメータを表す．2乗がリー微分

$$\mathcal{D}^2 = i\xi\mathcal{L}_X \tag{5.33}$$

であることから，同変形式に対しては冪零で同変コホモロジーが定義される．

この章で用いられる局所化公式とは以下のような公式である．

定理 5.1　ドゥイスターマート-ヘックマン (J.J. Duistermaat, G.J. Heckman)，アティヤ-ボット (M. Atiyah, R. Bott) [56, 57]

$\alpha(\xi)$ を同変閉形式 $(\mathcal{D}\alpha = 0)$ とする．ベクトル場の孤立固定点を x_p とし，

$$X = \sum_{i=1}^{d} \nu_i^p \left(x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

とする．このとき

$$\int_M \alpha(\xi) = \left(\frac{2\pi i}{\xi} \right)^{\frac{d}{2}} \sum_p \frac{\alpha_0(\xi)(x_p)}{\nu_1^p \cdots \nu_d^p} = \left(\frac{2\pi i}{\xi} \right)^{\frac{d}{2}} \sum_p \frac{\alpha_0(\xi)(x_p)}{\det^{1/2} \mathcal{L}_X} \tag{5.34}$$

となる．ただし $\alpha_0(\xi)(x_p)$ は α の 0 形式部分の固定点 x_p 上の値である．

証明をする前にコホモロジカル位相的場の理論の一般論を思い出しておくのは有効である．群 G の対称性が存在する系では，3.4 節で見ように一般のボゾン場 ϕ_i に対して BRS パートナーのフェルミオン ψ_i と対称性の群作用の無限小変換を生成する変換を δ_g と書くことにすると，コホモロジカル位相的場の理論を定義する BRS 作用素は一般形として，

$$\hat{\delta} \sim \psi_i \frac{\delta}{\delta \phi_i} + \delta_g \phi_i \frac{\delta}{\delta \psi_i}$$

と書かれていた $(\chi, H$ 等について今は省略している)．ボゾン ϕ_i は通常の座標 x で，ψ_i は外微分 dx に対応することを思いだそう．$\delta_g \phi_i \dfrac{\delta}{\delta \psi_i}$ は 1 形式 ψ_i を消して無限小変換で置き換えるので，リー群を生成するベクトル場 X を用いて $\xi\, i_X$ と書くことができる．局所化公式で使われている同変微分とコホモロジカル場の

理論の BRS 変換はほとんど同じと考えられるのである[1)].

証明　簡単のために $U(1)$ 対称性の場合の定理 5.1 のウィッテンによる簡単な証明 [58] を見てみよう．コホモロジカル位相的場の理論が結合定数 g によらずに $g\to 0$ で計算しても $g\to\infty$ で計算しても同じであったことと同じ論法を使う．$U(1)$ 不変な計量を g とし，$U(1)$ 不変な 1 形式で $\lambda=-\mathrm{g}(X,\ )$ なるものを導入する．同変形式つまり $\mathcal{D}\alpha=0$ であれば $\displaystyle\int\alpha$ は同変コホモロジーだけで決まるので，

$$\int_M \alpha e^{g\mathcal{D}\lambda}=\int_M \alpha+\int_M \mathcal{D}\left\{\alpha\sum_n \frac{1}{n!}(g^n\lambda(\mathcal{D}\lambda)^{n-1})\right\}=\int_M \alpha \tag{5.35}$$

である．つまり左辺は g に依存しない．これは α をオブザーバブル，$\mathcal{D}$ を BRS オペレータ $\hat{\delta}$, $\mathcal{D}\lambda$ を作用としたときの 3.1 節の結合定数非依存性の議論そのものである．$g\to\infty$ で計算すると

$$\mathcal{D}\lambda=d\lambda+i\xi\mathrm{g}(X,X)$$

であるから左辺は $\mathrm{g}(X,X)=0$ つまり固定点からのみ積分に寄与がある．コホモロジカル位相的場の理論が，固定点のまわりのガウス積分で評価できたのと同じである．固定点の近傍で，計量は $dx_i^2+dy_i^2$ と書け，λ は $\displaystyle\sum_n \nu_n(x_n dy_n-y_n dx_n)$ である．したがって

$$\mathcal{D}\lambda\sim 2\sum_n \nu_n dx_n\wedge dy_n+i\xi\sum_n \nu_n^2(x_n^2+y_n^2)$$

であるから，代入してガウス積分で評価するとよい．その結果ある固定点 x_p の近傍の積分から

$$\frac{\alpha_0(\xi)(x_p)}{\nu_1^p\cdots\nu_d^p}$$

が得られる．$g\to\infty$ なのでガウス分布のピークが鋭く立ちデルタ関数になるので，固定点 x_p が代入された結果が分子だ．分母はガウス積分の結果である．こ

---

1) 正確には超対称に拡張され，さらに一般には無限次元に拡張された同型微分とみなされる．

れを全ての固定点について足しあげたのが求める局所化公式 (5.34) である． ■

超対称ゲージ理論あるいはコホモロジカル位相的場の理論のようなフェルミオンも含めた理論に対しては，局所化公式をさらに拡張し書き直すことができる．$(B_i,I,J,\vec{H},\bar{\phi})$ といった ϕ 以外のボゾニックな変数を $\mathcal{B}$ で書くことにして，そのBRS パートナーでフェルミオニックな変数 $(\psi_i,\psi_I,\psi_J,\vec{\chi},\eta)$ を $\mathcal{F}$ とまとめて書くことにする．

ブルッゾ-フチートの公式 (U. Bruzzo, F. Fucito) [59]

作用が $S=\hat{\delta}\Psi(\phi,\mathcal{B},\mathcal{F})$ で与えられ，BRS 変換の固定点が孤立点で与えられるときの分配関数はブルッゾ-フチートの局所化公式を用いると

$$Z=\int\frac{D\phi}{U(N)}D\mathcal{B}D\mathcal{F}e^{-\hat{\delta}\Psi}=\int\prod_{I=1}^{N}d\phi_I\frac{\prod_{I\neq J}(\phi_I-\phi_J)}{S\det\mathcal{L}} \tag{5.36}$$

で得られる．ϕ_I は ϕ の固有値で，$S\det\mathcal{L}$ は

$$S\det\mathcal{L}=S\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial(Q)_{\mathcal{B}}}{\partial\mathcal{F}} & \dfrac{\partial(Q)_{\mathcal{B}}}{\partial\mathcal{B}}\\[2mm] \dfrac{\partial(Q)_{\mathcal{F}}}{\partial\mathcal{F}} & \dfrac{\partial(Q)_{\mathcal{F}}}{\partial\mathcal{B}}\end{pmatrix} \tag{5.37}$$

で定義される．ちなみに $S\det$ は超行列式のことで

$$S\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}:=\frac{\det A\det D}{\det B\det C} \tag{5.38}$$

で定義する．$(Q)_{\mathcal{B}}$ と $(Q)_{\mathcal{F}}$ は

$$\hat{\delta}=(Q)_{\mathcal{B}}\frac{\partial}{\partial\mathcal{B}}+(Q)_{\mathcal{F}}\frac{\partial}{\partial\mathcal{F}} \tag{5.39}$$

であり，例えば今の場合は

$$\hat{\delta}=\psi_i\frac{\partial}{\partial B_i}+\cdots+i[B_i,\phi]\frac{\partial}{\partial\psi_i}+\cdots \tag{5.40}$$

なので $(Q)_{\mathcal{B}}$ として ψ_i 等が，$(Q)_{\mathcal{F}}$ として $i[B_i,\phi]$ 等が与えられている．この証

明は省略するが，基本的に [60] の局所化公式の証明に沿っている．要は通常の局所化公式にフェルミオンが入っている場合に拡張した際，フェルミオンの積分はボゾンと分母分子が逆に出てくることを思い出してみれば，(5.36) はそれほど不思議ではないだろう．固定点が孤立点の場合は経路積分がこのように実行可能になるので，以下の節ではそうなるようにモデルを変形していく．

5.2.3　BRS 変換の変形と固定点方程式

この節では局所化定理を使えるようにモデルを変形しよう．作用 (5.27) には $SO(4)\otimes U(N)$ の部分群としての可換部分群 $U(1)^2\otimes U(1)^N$ の対称性がある．つまり，

$$
\begin{aligned}
&\delta^{U(1)^2\otimes U(1)^N} B_i = -i\varepsilon_i B_i, \quad \delta^{U(1)^2\otimes U(1)^N}\psi_i = -i\varepsilon_i\psi_i \\
&\delta^{U(1)^2\otimes U(1)^N} I = iIa, \quad \delta^{U(1)^2\otimes U(1)^N}\psi_I = i\psi_I a \\
&\delta^{U(1)^2\otimes U(1)^N} J = -i\varepsilon_+ J - iaJ, \quad \delta^{U(1)^2\otimes U(1)^N}\psi_J = -i\varepsilon_+\psi_J - ia\psi_J \\
&\delta^{U(1)^2\otimes U(1)^N}\vec{\chi} = (\chi_{\mathbf{R}}, i\varepsilon_+\chi_{\mathbf{C}}), \quad \delta^{U(1)^2\otimes U(1)^N}\vec{H} = (H_{\mathbf{R}}, i\varepsilon_+ H_{\mathbf{C}}) \\
&\delta^{U(1)^2\otimes U(1)^N}\bar{\phi} = 0, \quad \delta^{U(1)^2\otimes U(1)^N}\eta = 0 \\
&\delta^{U(1)^2\otimes U(1)^N}\phi = 0
\end{aligned}
\tag{5.41}
$$

のもと作用が不変である．ただし $a=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_N)$, つまり $U(N)$ の可換部分群の生成子であるとし，$\varepsilon_i\in\mathbb{R}$ $(i=1,2)$ は $SO(4)$ の部分群 $U(1)^2$ の生成子とし，δ^G は群 G による無限小変換を表している．また

$$
\varepsilon_+ = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \tag{5.42}
$$

とおいた．以下では ε_i, a_i などのパラメータは正にとる．

今もとの ϕ で書かれる $U(k)$ 対称性に加え，新しく ε_i と a で書かれる $U(1)^2\otimes U(1)^N$ も含めた同変微分作用素としての BRS 作用素に変形してみよう．その BRS 作用素を $\tilde{\delta}$ と書くことにすると，$\hat{\delta}^2=\delta^{U(k)}_{(-\phi)}$ であった元の BRS 作用素から

$$
\tilde{\delta}^2 = \delta^{U(k)}_{(-\phi)} + \delta^{U(1)^N}_{(a)} + \delta^{U(1)^2}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \tag{5.43}
$$

と変形するとよい．ただし $\delta^G_{(\Delta)}$ はパラメータ Δ のもと，群 G でのゲージ変換

を表す．より具体的には

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}^2 B_i &= \tilde{\delta}\psi_i = i[B_i,\phi] - i\varepsilon_i B_i \\ \tilde{\delta}^2 I &= \tilde{\delta}\psi_I = -i\phi I + iIa \\ \tilde{\delta}^2 J &= \tilde{\delta}\psi_J = iJ\phi - i\varepsilon_+ J - iaJ \\ &\vdots\end{aligned} \tag{5.44}$$

となっていて，例えば (5.44) の右辺第 2 項が変形で生じた項である．$\tilde{\delta}$ が 1 回だけ作用する部分は (5.26) の $\hat{\delta}$ から変形をうけない．つまり $\tilde{\delta}B_i = \hat{\delta}B_i, \tilde{\delta}I = \hat{\delta}I, \cdots$ 等となる（3.4 節参照）．作用も (5.27) の $(\Psi + \Psi_{\mathrm{proj}})$ は変わらないが，BRS 変換の変形にともなって若干変形される．局所化公式のためにボゾニックな変数に対する固定点方程式を全てまとめて書くと，ADHM 方程式 (5.28) [2] と (5.29) および変形された BRS 変換の (5.44) が 0 になるべしという式

$$i[B_i,\phi] - i\varepsilon_i B_i = 0 \tag{5.45}$$

$$-i\phi I + iIa = 0 \tag{5.46}$$

$$iJ\phi - i\varepsilon_+ J - iaJ = 0 \tag{5.47}$$

が得られる．3.3 節の固定点定理 (p132) のところで触れたように，この固定点の近傍で経路積分が評価される．

5.2.4 固定点方程式の解とヤング図 (A. Young)

この節では (5.28),(5.29),(5.45),(5.46),(5.47) を解いて，局所化定理（定理 5.1）が適応される条件，すなわち解が孤立点として得られることを示す．さらに，解がヤング図で分類できることを見ることにする． [39] の中に証明があるが，ここではより初等的に [61] の方法を採用する．証明に興味がなく，先を急ぎたい

---

[2] ADHM 方程式が固定点方程式に含まれることに関して注意しておく．もともとガウス型の重みとして作用を考えると ADHM 方程式の解に寄与が集中するという議論は前に見たとおりである．局所化公式を用いる今の場合は別の議論がある．BRS 変換の固定点としてどのように得られるかというと，$\tilde{\delta}\vec{\chi} = \vec{H}$ が 0 であるという方程式に対して，$\vec{H}$ の運動方程式として $\vec{H}^\dagger = \frac{1}{2}(\mu_{\mathbf{R}} - \zeta \mathbf{1}_k,\ \mu_{\mathbf{C}})$ を代入して得られる．

人は事実と認めて次節に飛んでもそれ以降を読むことに支障はない．

$U(k)$ ゲージ対称性を用いて ϕ を対角化し

$$\phi = \mathrm{diag}(\phi_{\mathbf{1}}, \phi_{\mathbf{2}}, \cdots, \phi_{\mathbf{k}}) \tag{5.48}$$

で表す．この節では下付添字が多く紛らわしいので，区別を明確にするために太文字の添字 $_{\mathbf{1},\mathbf{2},\cdots,\mathbf{k}}$ や $_{\mathbf{L},\mathbf{M}}$ 等は $U(k)$ に付随した添字を表すとする．次に (5.45),(5.46),(5.47) を解く．(5.45) から

$$\phi_{\mathbf{M}} - \phi_{\mathbf{L}} = \varepsilon_i \tag{5.49}$$

の場合に限り B_i の $\mathbf{L}$ 行 $\mathbf{M}$ 列成分が 0 でない量が許される．

$$B_{i\ \mathbf{LM}} \neq 0 \tag{5.50}$$

以下,「$\neq 0$」を「0 でない」ではなく「0 で無い場合がありえる」の意味でも使う．文脈からどちらの意味か区別はつくであろう．同様に (5.46) から

$$\phi_{\mathbf{L}} = a_m \tag{5.51}$$

の場合に限り

$$I_{\mathbf{L}m} \neq 0 \tag{5.52}$$

となる．また同様に (5.47) から

$$\phi_{\mathbf{M}} = a_l + \varepsilon_+ \tag{5.53}$$

の場合に限り

$$J_{l\mathbf{M}} \neq 0 \tag{5.54}$$

であることがわかる．逆に，$\phi_{\mathbf{I}}$ がある実数 x と整数 $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ で表される $x + n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2$ の値をとらないと仮定すると，任意の添字 $j,\mathbf{J}$ に対して $I_{\mathbf{I}j} = 0$, $J_{j\mathbf{I}} = 0$, $B_{i\ \mathbf{IJ}} = B_{i\ \mathbf{JI}} = 0$ である．よって (5.28) の左辺の $(\mathbf{I},\mathbf{I})$ 成分が 0 である．右辺の $(\mathbf{I},\mathbf{I})$ 成分が $i\zeta \neq 0$ であるから矛盾となる．要するに ϕ の対角成分は x で固定される横幅 ε_1 縦幅 ε_2 の格子点 $x + n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2$ に値をとる場合にのみ解が存在することがわかる．これらの事実をまとめると，x のとりうる値を二つの場合に大別して次の補題のようにまとめられる．

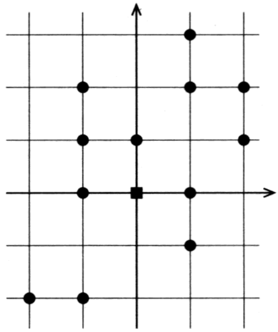


図 **5.2**　$P_{[\hat{x}_{\mathbf{I}}]}$

__補題 5.1__　もし (5.28), (5.45), (5.46), (5.47) が解を持つなら $\phi_{\mathbf{I}}$ は以下で与えられる $\varphi_{[x]}^{(n_1,n_2)}$ のいずれかに値を持つ.

$$\varphi_{[x]}^{(n_1,n_2)} = x + n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2, \qquad n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \tag{5.55}$$

ここで

$$x \in \mathbf{B} := \{a_i^{(\pm)} \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, N \,|\, a_i^{(-)} := a_i, a_i^{(+)} := a_i + \varepsilon_+\} \tag{5.56}$$

あるいは

$$x \in \mathbf{Y} := \{y \in \mathbb{R} \,|\, \forall i, n_1, n_2,\ y \neq a_i^{(\pm)} + n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2\} = \bar{\mathbf{B}} = \mathbb{R} \setminus \mathbf{B} \tag{5.57}$$

である. ただし $a^{(-)}$ と $a^{(+)}$ をまとめて $a^{(\pm)}$ で略記している.

ここで $\mathbf{B}$ と $\mathbf{Y}$ に対して注意しておく. そもそも, 今わかっていることは $x \in \mathbb{R}$ に対して ϕ の対角成分は $x + n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2$ となるべしということである. 後の都合のため, ここでは $\mathbb{R}$ を $\mathbf{B}$ と $\mathbf{Y}$ に分けた. つまり $\mathbb{R} = \mathbf{B} \cup \mathbf{Y}$ で $\mathbf{B} \cap \mathbf{Y} = \varnothing$ である.

一つ与えられた x に対して $\{\varphi_{[x]}^{(n_1,n_2)} | x \text{ は固定 }\}$ は図 5.2 に与えられるようなグラフを与える. グラフを $P_{[x]}$ と書くことにする. 図 5.2 で黒い四角で書いた原点は $\varphi_{[x]}^{(0,0)} = x$ を表し, 黒丸で書いた格子点 (n_1, n_2) は ϕ の固有値 $\varphi_{[x]}^{(n_1,n_2)}$ であ

る．$P_{[x]}$ の集合を与えることで，ϕ が決まり

$$\phi = \bigoplus_{x\in\mathbf{B}} \begin{pmatrix} \varphi^{(n_1,n_2)}_{[a_l^{(\pm)}]} & & \\ & \varphi^{(n_1',n_2')}_{[a_l^{(\pm)}]} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \tag{5.58}$$

$$\bigoplus_{y_i\in\mathbf{Y}} \begin{pmatrix} \varphi^{(n_1,n_2)}_{[y_i]} & & \\ & \varphi^{(n_1',n_2')}_{[y_i]} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \tag{5.59}$$

と書ける行列で，全体としては $k\times k$ 行列である．$\bigoplus_{x\in\mathbf{B}}$ や $\bigoplus_{y_i\in\mathbf{Y}}$ は $k\times k$ の対角行列を x や y_i に属する φ のブロック対角行列で表していることを意味している．例えば $x_1, x_2\in\mathbf{B}$ として，対角成分に $x_1, x_1+\varepsilon_1, x_2, x_2-\varepsilon_2$ があるとする ($k=4$)．このとき，

$$\begin{aligned}\phi &= \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1+\varepsilon_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_2-\varepsilon_2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{cc|cc} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1+\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2-\varepsilon_2 \end{array}\right)\end{aligned}$$

である．ここまでの議論では固有値 $\varphi^{(n_1,n_2)}_{[x]}$ は縮退していてよいので，$\varphi^{(n_1,n_2)}_{[a_l^{(\pm)}]}$ と書かれているところは本来縮退度のランク d の単位行列 $\mathbf{1}_d$ を用いて $\varphi^{(n_1,n_2)}_{[a_l^{(\pm)}]}\mathbf{1}_d$ と書かれるべきである．しかし実は縮退していないことを要求してよいことがわかる．詳しい解説は [39] を参照してもらうことにするが，モジュライ空間の構成がケーラー商として構成していることと，ケンプ (G. Kempf) とネス (L. Ness) の定理からの帰結として，縮退がないという事実を導くことができるのである．また，物理的には違った意味で縮退の無い状態だけ考えればいいことがわかる．ブルッゾ-フチートの局所化公式 (5.36) を見てもわかるように経路積分の積分測

度としてファンデアモンデ行列式 $\prod_{\mathbf{I}\neq\mathbf{J}}(\phi_{\mathbf{I}}-\phi_{\mathbf{J}})$ が現れる．縮退があるところの行列式は 0 なので，分配関数には寄与しないことがわかる．いずれにしても，縮退が無い場合だけを以下では考えることにする．

各々のブロックの中で固有値に対して以下のように順序づける．

$$\varphi^{(n_1,n_2)}_{[a_l^{(\pm)}]}<\varphi^{(n_1',n_2')}_{[a_l^{(\pm)}]}<\varphi^{(n_1'',n_2'')}_{[a_l^{(\pm)}]}<\cdots$$
$$\varphi^{(n_1,n_2)}_{[y_i]}<\varphi^{(n_1',n_2')}_{[y_i]}<\varphi^{(n_1'',n_2'')}_{[y_i]}<\cdots \tag{5.60}$$

この順序によって格子点も含めて添字間の写像が決まっている．

$$\mathbf{I}\longmapsto(x,(n_1,n_2)) \tag{5.61}$$

つまり，x でブロックが指定され，対角成分を小さい順に並べることで $(x,(n_1,n_2))$ が何行目なのかが完全に決まっている．B_i も同じブロック構造で書くことにして

$$B_i=\bigoplus_{x\in\mathbf{B}}\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & B_{i\ (x,(n_1,n_2)),(x,(m_1,m_2))} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \tag{5.62}$$

$$\bigoplus_{x\in\mathbf{Y}}\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & E_{i\ (x,(n_1,n_2)),(x,(m_1,m_2))} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}. \tag{5.63}$$

0 でない B_1 成分は $\{(x,(n_1,n_2)),(x,(n_1-1,n_2))\}$ 成分 $((x,(n_1,n_2))$ 行 $(x,(n_1-1,n_2))$ 列の成分の意）に，0 でない B_2 成分は $\{(x,(n_1,n_2)),(x,(n_1,n_2-1))\}$ に現れる．このゼロでない成分に矢印を対応させてみよう．B_1 のゼロでない成分は (n_1,n_2) と (n_1-1,n_2) を結ぶ左向きの矢印に，B_2 も同様に (n_1,n_2) と (n_1,n_2-1) を結ぶ下向きの矢印を対応させて $P_{[x]}$ グラフに書き込む．そうしてできたグラフを $G_{[x]}$ とする．例えば図 5.3 のようになる．ちなみに I,J の非自明項は

$$\phi_{\mathbf{L}}=a_m \text{をみたす } \mathbf{L},m \text{ に対して } I_{\ (\mathbf{L},(0,0)),m}\neq 0 \tag{5.64}$$

$$\phi_{\mathbf{L}}=a_m-\varepsilon_+ \text{をみたす } m,\mathbf{L} \text{ に対して } J_{m,(\mathbf{L},(1,1))}\neq 0 \tag{5.65}$$

である（繰り返すが，ここで「$\neq 0$」と書いたが，意味は「0 であるとは限らな

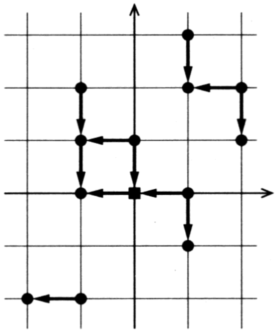


図 **5.3**　$G_{[x]}$

い」ということだ）.

(5.28), (5.64), (5.65) から次の補題が得られる.

補題 5.2　(5.28), (5.45), (5.46) が解を持つのには，ϕ が

$$\phi = \bigoplus_l \bigoplus_{(n_1,n_2)\in G_{[a_l^{(\pm)}]}} \varphi_{[a_l^{(\pm)}]}^{(n_1,n_2)} \mathbf{1}_{N_{[a_l^{(\pm)}]}^{(n_1,n_2)}} \tag{5.66}$$

$$\varphi_{[a_l^{(\pm)}]}^{(n_1,n_2)} = a_l^{(\pm)} + n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 \tag{5.67}$$

で与えられる場合に限る．B_i は以下同じブロック構造にとり，a_l を添字にすると見にくくなるので単に l だけつけることにする.

$$B_i = \bigoplus_l B_{i\{l\}} \tag{5.68}$$

証明　要は $y \in \mathbf{Y}$ の場合，すなわち (5.64) と (5.65) から I, J ともに 0 行列であるブロックが存在するとき，矛盾することを導けばよい．ある $\phi_{\mathbf{I}}$ について $\phi_{\mathbf{I}} = \varphi_{[y]}^{(n_1,n_2)}$ であるならば，(5.28) の左辺は

$$(5.28)\text{ の左辺} = \sum_{i=1,2} [B_i, B_i^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J$$

$$
=\begin{pmatrix} \bigoplus_l \sum_{i=1,2}[B_{i\{l\}},B^\dagger_{i\{l\}}]+(II^\dagger-J^\dagger J)_l & 0 \\ 0 & \bigoplus_{[y]}\sum_{i=1,2}[E_{i[y]},E^\dagger_{i[y]}] \end{pmatrix}
\tag{5.69}
$$

のように右下のような交換関係でのみ書かれるブロック行列が現れる．y のところは (5.64), (5.65) でわかるように I,J の 0 でない成分がないからだ．(5.28) の右辺は

$$
(5.28)\ \text{の右辺} = \zeta\begin{pmatrix} \bigoplus_l \mathbf{1}_l & 0 \\ 0 & \bigoplus_{[y]}\mathbf{1}_{[y]} \end{pmatrix} \tag{5.70}
$$

である．右下のブロックは左辺ではトレースレスだが，右辺はトレースが 0 でないので矛盾する．したがってこの場合は解が存在しない． ■

非可換パラメータ ζ を以下では，

$$
\zeta > 0 \tag{5.71}
$$

と正にとることにする（負の場合も本質的には以下の議論も変わらない）．この条件より $a^{(+)}$ を原点に対応させるグラフについては (5.28) の対応するブロック行列に対して，左辺のトレースは $-\mathrm{tr}(J^\dagger J)_{\mathbf{I}} \leq 0$ であるのに対し右辺は $\zeta \mathrm{tr}\mathbf{1} > 0$ となるので，このような解が存在しないことがわかる．したがって以下では

$$
J = 0 \tag{5.72}
$$

とし，$a^{(+)}$ について考える必要がない．このとき以下の定理が得られる．

定理 5.2　グラフ $G_{[a_l^{(-)}]}$ を，(5.66) で与えられる固有値 $\varphi^{(n_1,n_2)}_{[a_l^{(-)}]}$ で定義されたグラフであるとする．また ζ は正であるとする．(5.28), (5.45), (5.46) が解を持つためには以下の 3 条件が必要である．

（1）　$G_{[a_l^{(-)}]}$ は一つの連結なグラフである．

（2）　$G_{[a_l^{(-)}]}$ は原点 (0,0) を含む．

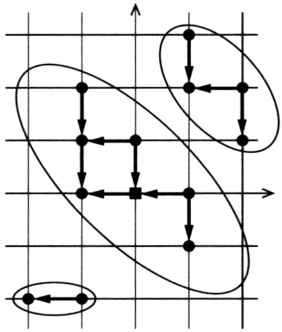


図 5.4　$G_{[a_l^{(-)}]}$ はいくつかの連結グラフ $G^{(c)}_{[a_l^{(-)}]}$ でできている．

(3)　任意の $G_{[a_l^{(-)}]}$ の中の点 (n_1,n_2) は第 3 象限 $n_1 \leq 0, n_2 \leq 0$ にある．

証明　まず，(5.60) で固有値に大小の順を入れたことから，ブロック行列 $B_{i\{l\}}$ はさらに小さな上三角行列のブロック行列の直和で書かれ，$B^\dagger_{i\{l\}}$ は下三角行列の直和で書かれることに注意しよう．

$$B_{i\{l\}} = \bigoplus_{(c)} B^{(c)}_{i\{l\}} = \bigoplus_{(c)} \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.73}$$

$$B^\dagger_{i\{l\}} = \bigoplus_{(c)} B^{\dagger\,(c)}_{i\{l\}} = \bigoplus_{(c)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 \end{pmatrix} \tag{5.74}$$

これは (5.49), (5.50) と $\varepsilon_i > 0$ からただちにわかる．添字 (c) は連結グラフを識別するもので，$G_{[a_l^{(-)}]}$ の中の連結グラフを $G^{(c)}_{[a_l^{(-)}]}$ で表すことにする（例として図 5.4 を参照）．(5.73) と (5.74) から

$$[B^{(c)}_{i\{l\}}, B^{\dagger\,(c)}_{i\{l\}}] = \begin{pmatrix} M_{\rm min} & * & 0 \\ * & M_{\rm int} & * \\ 0 & * & M_{\rm max} \end{pmatrix} \tag{5.75}$$

が得られる．ただし

$$M_{\rm min} = + \sum_{(m_1,m_2)} B^{(c)}_{i\ \{l\}(n_1^{\rm min}, n_2^{\rm min}),(m_1,m_2)} B^{\dagger\ (c)}_{i\ \{l\}(m_1,m_2),(n_1^{\rm min}, n_2^{\rm min})} \tag{5.76}$$

$$M_{\rm max} = - \sum_{(m_1,m_2)} B^{\dagger\ (c)}_{i\ \{l\}(n_1^{\rm max}, n_2^{\rm max}),(m_1,m_2)} B^{(c)}_{i\ \{l\}(m_1,m_2),(n_1^{\rm max}, n_2^{\rm max})} \tag{5.77}$$

$$M_{\rm int} = \begin{pmatrix} M^{(n_1,n_2)}_{\rm int} & * & \\ * & M^{(n'_1,n'_2)}_{\rm int} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \tag{5.78}$$

であり，

$$\begin{aligned} M^{(n_1,n_2)}_{\rm int} = &+ \sum_{(m_1,m_2)} B^{(c)}_{i\ \{l\}(n_1,n_2),(m_1,m_2)} B^{\dagger\ (c)}_{i\ \{l\}(m_1,m_2),(n_1,n_2)} \\ &- \sum_{(m_1,m_2)} B^{\dagger\ (c)}_{i\ \{l\}(n_1,n_2),(m_1,m_2)} B^{(c)}_{i\ \{l\}(m_1,m_2),(n_1,n_2)} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{5.79}$$

とした．(5.76) の $(n_1^{\rm min}, n_2^{\rm min})$ は，$G^{(c)}_{[a_l^{(-)}]}$ の中の格子点が表す ϕ の固有値のうちで最小の固有値に対応する格子点で，(5.77) の $(n_1^{\rm max}, n_2^{\rm max})$ は $G^{(c)}_{[a_l^{(-)}]}$ の中の最大の固有値に対応する点を表している．$(n_1,n_2),\cdots$ は $G^{(c)}_{[a_l^{(-)}]}$ の中のほかの点を表している．

(5.28) の中の $\{\{l\}\ (c)\}$ ブロックに注目する．

$$\sum_{i=1,2} \left[B^{(c)}_{i\{l\}}, B^{\dagger\ (c)}_{i\{l\}}\right] + (II^\dagger)_{\{l\}(c)} = \zeta\ \mathbf{1}_{\{l\}(c)} \tag{5.80}$$

$G^{(c)}_{[a_l^{(-)}]}$ の連結グラフが (0,0) を含まないならば，(5.64) を思い出すと，$I_{(\{l\}(c)),j} = 0$ (I の行が $(\{l\}(c))$ ブロックに含まれ，列が j の成分が 0) である．すなわち第

2項が0ということである．これはトレースをとれば右辺と矛盾する．したがって条件(1)(2)は必要である．

次に(5.77)の部分 $\{\{l\};(n_1^{\max},n_2^{\max}),(n_1^{\max},n_2^{\max})\}$ の成分を見ると

$$\zeta=-\sum_{(m_1,m_2)}B^\dagger_{i\{l\}(n_1^{\max},n_2^{\max}),(m_1,m_2)}B_{i\{l\}(m_1,m_2),(n_1^{\max},n_2^{\max})}$$

$$+(II^\dagger)_{\{l\};(n_1^{\max},n_2^{\max})),(n_1^{\max},n_2^{\max})} \tag{5.81}$$

であるから，もし

$$n_1^{\max}\geq 1 \quad \text{または} \quad n_2^{\max}\geq 1 \tag{5.82}$$

ならば，(5.64)を思い出すと右辺の第二項は0である．

$$(5.81)\text{の右辺}=-\sum_{(m_1,m_2)}B^\dagger_{i\{l\}(n_1^{\max},n_2^{\max}),(m_1,m_2)}B_{i\{l\}(m_1,m_2),(n_1^{\max},n_2^{\max})}\leq 0$$

$$(5.81)\text{の左辺}=\zeta>0 \tag{5.83}$$

であるから矛盾する．したがって(3)も言えたことになる． ■

結局，解が存在するならば対応するグラフは

$$(n_1^{\max},n_2^{\max})=(0,0) \tag{5.84}$$

となる一つの連結グラフで書かれるというところまでわかった．

長くなってきたので，ここまでわかったことを一旦整理してみよう．$U(N)$の添字l $(1\leq l\leq N)$に対し対応するϕの固有値に$a_l^{(-)}$とそれに付随する系列$a_l^{(-)}+n_1\varepsilon_1+n_2\varepsilon_2$が存在し，その点列が原点と第3象限に存在する原点につながる連結グラフ$C_{(l)}$で書ける場合に，非自明解が存在する可能性があることを意味している．連結グラフは例えば図5.5のようなものである．$C_{(l)}$が与えられたとき，グラフの各点$(l;n_1,n_2)$がϕの固有値のラベルである$U(k)$の添字と対応する．B_1の$a_l^{(-)}$に付随しているブロック$B_{1\{l\}}$の0でない成分は

$$B_{1\ \{l\}(n_1-1,n_2),(n_1,n_2)}, \qquad (n_1-1,n_2),(n_1,n_2)\in C_{(l)} \tag{5.85}$$

となる．つまり$C_{(l)}$の中の(n_1,n_2)から(n_1+1,n_2)を結ぶ左向き矢印（図5.6）

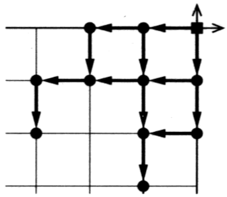


図 5.5　$C_{(l)}$ は原点■を含む第 3 象限の連結グラフ.



図 5.6　B_1



図 5.7　B_2

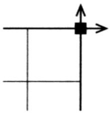


図 5.8　I

に対して非自明な成分が複素で数えて 1 成分，実数で数えて 2 成分ある．B_2 の 0 でない成分は

$$B_{2\ \{l\}(n_1,n_2-1),(n_1,n_2)}\ ,\qquad (n_1,n_2-1),(n_1,n_2)\in C_{(l)} \tag{5.86}$$

である．つまり $C_{(l)}$ の中の (n_1,n_2) から (n_1,n_2+1) を結ぶ下向き矢印（図 5.7）に対して非自明な成分が複素で数えて 1 成分，実数で数えて 2 成分ある．ちなみに 0 でない I 成分がありえるのは

$$I_{\mathbf{I}=\{l,(0,0)\},l} \tag{5.87}$$

だけであり，グラフを与えると一つの l に対して原点に対応する複素 1 成分，実で 2 成分だけ今のところ生き残っている．結局，(B_1,B_2,I,J) の中でこれまでのプロセスで未決定の成分は，実成分で数えると，各 $C_{(l)}$ に対して

$$2\times\{(\text{左向き矢印の数})+(\text{下向き矢印の数})+(\text{原点の数，つまり 1})\} \tag{5.88}$$

となっている．

これらの非自明な成分 (5.85)～(5.87) を用いてまだ解いていない (5.28) と (5.29) をあらわに書き下すと

$$\zeta=B_{1\{l\}(n_1,n_2),(n_1+1,n_2)}B^{\dagger}_{1\{l\}(n_1+1,n_2),(n_1,n_2)}$$

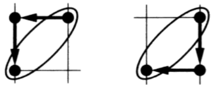


図 5.9　式 (5.90)

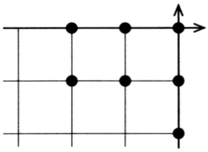


図 5.10　$U(1)$ ゲージ対称性

$$
\begin{aligned}
&-B^{\dagger}_{1\{l\}(n_1,n_2),(n_1-1,n_2)}B_{1\{l\}(n_1-1,n_2),(n_1,n_2)}\\
&+B_{2\{l\}(n_1,n_2),(n_1,n_2+1)}B^{\dagger}_{2\{l\}(n_1,n_2+1),(n_1,n_2)}\\
&-B^{\dagger}_{2\{l\}(n_1,n_2),(n_1,n_2-1)}B_{2\{l\}(n_1,n_2-1),(n_1,n_2)}\\
&+I_{\{\{l\}(n_1,n_2)\},j}\ {I^{\dagger}}_{j,\{\{l\}(n_1,n_2)\}} \qquad (5.89)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0=&B_{1\{l\}(n_1,n_2),(n_1+1,n_2)}B_{2\{l\}(n_1+1,n_2),(n_1+1,n_2+1)}\\
&-B_{2\{l\}(n_1,n_2),(n_1,n_2+1)}B_{1\{l\}(n_1,n_2+1),(n_1+1,n_2+1)} \qquad (5.90)
\end{aligned}
$$

である．(5.89), (5.90) に対しても図形的な意味を与えよう．

- (5.89) は左右あるいは上下向きの矢印の終点に対する制限である．言い換えると $C_{(l)}$ の全ての点 (n_1,n_2) に対して (5.89) によって条件が課せられる．条件の数は実で $C_{(l)}$ の点の数に等しい．
- (5.90) は (n_1,n_2) と (n_1+1,n_2+1) を結ぶ鍵型（図 5.9）に対応している．中間点 (n_1+1,n_2) または (n_1,n_2+1) が $C_{(l)}$ に存在しなくてはいけないからだ．課せられる条件式は複素で鍵型の存在する (n_1,n_2) と (n_1+1,n_2+1) の組の数（以下では単に「鍵型の数」と省略），実でその 2 倍である．
- $U(k)$ 対称性は対角化のために用いられているが，まだ $U(1)^k$ が残っている．この相回転の自由度は対角成分の個数だけ残っているが，対角成分すなわち固有値は各 $C_{(l)}$ グラフの格子点 (n_1,n_2) に他ならない．したがって $C_{(l)}$ の点の数はゲージの自由度とみなされる（図 5.10 参照）．

以上のことから

$$2\times\{\,(\text{点の数})+(\text{鍵型の数})\,\} \qquad (5.91)$$

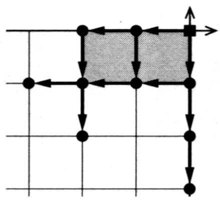


図 5.11　4 角形分割と線分

が全体としての実方程式として課される条件数である．

ここまで来ると，この節の結論である次の定理が容易に導出できる．

定理 5.3　$C_{(l)}$ がヤング図のときに限り (5.28), (5.29), (5.45), (5.46), (5.47) は解を持つ．このとき解は孤立点で与えられる．

証明　グラフ $C_{(l)}$ を 2 次元面を 4 角形分割したものと，それからはみ出た線分で構成されるグラフとみなそう（図 5.11）．オイラー数は

$$\chi = \{\text{点の数}\} - \{\text{線の数}\} + \{\text{面の数}\} \tag{5.92}$$

であることを思い出す．簡単のため，2 次元面に穴のない場合を考えると $\chi = -1$ である．未定の自由度が (5.88) で，非自明な条件の数が (5.91) であるから，

$$\begin{aligned}(\text{未知変数}) - (\text{条件式}) &= (5.88) - (5.91)\\ &= 2\{(\text{左向き矢印の数}) + (\text{下向き矢印の数}) + 1\}\\ &\quad -2\{(\text{点の数}) + (\text{鍵型の数})\}\end{aligned}$$

である．ここで図 5.12 を見ればわかるように

$$\{\text{面の数}\} \leq \text{鍵型の数} \tag{5.93}$$

であることに注意．$C_{(l)}$ がヤング図の場合に限り，等式が成立している．結局

$$\begin{aligned}(\text{未知変数}) - (\text{条件式数}) &\leq 2\{(\text{線の数}) + 1 - (\text{点の数}) - (\text{面の数})\}\\ &= 2\,(\text{オイラー数}) + 2\end{aligned} \tag{5.94}$$

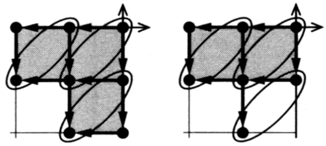


図 5.12　(左) は縦の列の格子点数が左にいくにつれ増加しないからヤング図．(右) は列の格子点数が増減しているのでヤング図ではない．

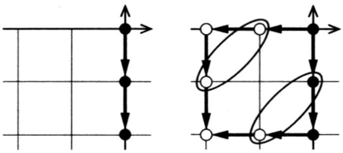


図 5.13　穴なし（左）と穴つき（右）

である．2 次元面に穴がないとオイラー数は -1 だったので

$$（未知変数）-（条件式数）\leq 0 \tag{5.95}$$

で等号成立は $C_{(l)}$ がヤング図の場合に限り，しかも解が孤立点であることが示された．

$C_{(l)}$ に穴があるときは図 5.13 からわかるように，鍵型が存在するのに面がないので，（未知変数）–（条件式数）が負になり解なしであることが言える．　■

以上のように (5.28), (5.29), (5.45), (5.46), (5.47) の解はヤング図と対応しており，さらに解が孤立点なので局所化公式を用いて分配関数を計算してよいことがわかった．

5.2.5　分配関数の計算

局所化公式を用いて分配関数を計算しよう．局所化公式（定理 5.1）によると，$\xi\mathcal{L}_X$ の固有値を求めると積分が実行できる．今の場合，積分は分配関数の経路

積分で

$$Z_k := \frac{1}{vol.\ U(k)} \int \mathcal{D}B_i \mathcal{D}I \mathcal{D}J \mathcal{D}\vec{\chi} \mathcal{D}\vec{H} \exp(-S) \tag{5.96}$$

であり，ここでの作用は変形された BRS 作用素 $\tilde{\delta}$ で定義されている以下のものである．

$$\int \tilde{\delta}(\Psi + \Psi_{\rm proj}) \tag{5.97}$$

ただし $\Psi + \Psi_{\rm proj}$ は (5.27) で導入されたものと同じものである．したがって BRS 変換作用素が同変微分作用素であったことを思い出すと，求める $\xi\mathcal{L}_X$ の固有値とは (5.43) の固有値であることがわかる．ここでは [39] の方法を用いてそれを求めよう．

(5.28), (5.29), (5.45), (5.46), (5.47) の解が固有値を求める際の固定点であるが，その点におけるモジュライ空間の接空間を用いる．以下しばらく $(B_1, B_2, I, J = 0)$ はこの固定点を表すものとする．固定点方程式 (5.45), (5.46), (5.47) は

$$\left(\delta^{U(k)}_{(-\phi)} + \delta^{U(1)^N}_{(a)} + \delta^{U(1)^2}_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}\right)(B_i, I, J) = (0, 0, 0) \tag{5.98}$$

であることから，固定点では $\delta^{U(k)}_{(-\phi)}$ の固有値は (5.45), (5.46), (5.47) で読み取ることができる．$\delta^{U(k)}_{(-\phi)}$ の表現空間で k 次元ベクトル空間を V, $\delta^{U(1)^N}_{(a)}$ の表現空間で N 次元ベクトル空間を W, $\delta^{U(1)^2}_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}$ の 2 次元空間を Q と書くことにする．$\phi \in \mathrm{Hom}(V, V)$, $B_i \in \mathrm{Hom}(V, V \times Q)$, $I \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $J \in \mathrm{Hom}(W^*, V \times Q^2)$ である．

ここで再びケンプとネスの定理から

$$\mu_{\mathbf{R}}^{-1}(\zeta) \cap \mu_{\mathbf{C}}^{-1}(0)/U(k) = \mu_{\mathbf{C}}^{-1}(0)//GL_k(\mathbb{C}) \tag{5.99}$$

である事実を認めることにする（詳しくは [39] 参照）．$\mu_{\mathbf{C}}$ が $\mathrm{Hom}(V, V \overset{2}{\wedge} Q)$ であることに注意する．固定点上の接ベクトルを $(\delta B_1, \delta B_2, \delta I, \delta J)$ とすると $\mu_{\mathbb{C}} = 0$ の変分から

$$[\delta B_1, B_2] + [B_1, \delta B_2] + I\delta J = 0 \tag{5.100}$$

が満たすべき条件式で，これも $\mathrm{Hom}(V, V \overset{2}{\wedge} Q)$ に属する．

次に複体

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Hom}(V,Q\otimes V) & & \\ & & \oplus & & \\ \mathrm{Hom}(V,V) & \xrightarrow{a} & \mathrm{Hom}(W,V) & \xrightarrow{b} & \mathrm{Hom}(V,V)\otimes\wedge^2 Q \\ & & \oplus & & \\ & & \mathrm{Hom}(V,\overset{2}{\wedge}Q\otimes W) & & \end{array} \tag{5.101}$$

を導入する．a は $g\in\mathrm{Hom}(V,V)$ とすると

$$g\longmapsto(g^{-1}B_ig,\ g^{-1}I,\ Jg=0)$$

であり，b は

$$(\delta B_i,\delta I,\delta J)\longmapsto[\delta B_1,B_2]+[B_1,\delta B_2]+I\delta J$$

を表している．したがって，モジュライ空間の接空間は

$$\mathcal{M}_k(\zeta)=\mathrm{Ker}b/\mathrm{Im}a \tag{5.102}$$

で得られる．固有値を計算するために表現行列のトレースである指標を用いて計算する．複体 (5.101) の中央から両端を引くと Ch(Ker$b$/Im) が求まり，

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}(\mathrm{Ker}b/\mathrm{Im}a)=&\mathrm{Ch}\{\mathrm{Hom}(V,V)\otimes T_1\oplus\mathrm{Hom}(V,V)\otimes T_2\oplus\\ &\oplus\mathrm{Hom}(W,V)\oplus\mathrm{Hom}(V,W)\otimes T_1T_2\}\\ &-\mathrm{Ch}\{\mathrm{Hom}(V,V)\}-\mathrm{Ch}\{\mathrm{Hom}(V,V)\otimes T_1T_2\}\\ =&\mathrm{Ch}\{(V^*\otimes V)\otimes(T_1+T_2-1-T_1T_2)\} &(5.103)\\ &+\mathrm{Ch}\{\mathrm{Hom}(W,V)\oplus\mathrm{Hom}(V,W)\otimes T_1T_2\} &(5.104)\end{aligned}$$

である．ここで $T_i=e^{-i\varepsilon_i}$ (つまり Q が $T_1\oplus T_2$, $\overset{2}{\wedge}Q$ が T_1T_2) とし，$\mathrm{Hom}(V,V)=V^*\otimes V$ とした．以下では $U(1)^N$ の元も同様に $T_{a_l}=\exp(ia_l)$ $(l=1,\cdots,N)$ とおく．$\delta_{(a)}^{U(1)^N}$ と $\delta_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$ の固有値は最初からわかっているが，$\delta_{(-\phi)}^{U(k)}$ の分からの寄与の計算が少々面倒なわけだ．しかし固定点上では $\delta_{(-\phi)}^{U(k)}$ の固有値は $\delta_{(a)}^{U(1)^N}$ と $\delta_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$ の固有値で求まっていたことを思い出すと，V をその固有ベクトルで分

解して計算するとよいことがわかるであろう.

前節で見たように ϕ の固有値はヤング図の格子点の座標に対応しており, (5.67) の $a_l^{(-)}$ の場合であったから $a_l+n_1\varepsilon_1+n_2\varepsilon_2$ で与えられていた. すなわち

$$\mathrm{Ch}\{V^*\}=\sum_l \sum_{(n_1,n_2)\in Y_l} e^{i(a_l+n_1\varepsilon_1+n_2\varepsilon_2)}$$
$$\mathrm{Ch}\{V\}=\sum_l \sum_{(n_1,n_2)\in Y_l} e^{-i(a_l+n_1\varepsilon_1+n_2\varepsilon_2)} \tag{5.105}$$

である. ただしここで Y_l は原点に a_l を対応させた格子点の集まりとしてのヤング図を表している. ヤング図の格子点の数が ϕ の対角成分（固有値）に対応していたので, ヤング図 Y_l の格子点の数を $|Y_l|$ で表すことにすると

$$\sum_l |Y_l|=k \tag{5.106}$$

を満たす. 言い換えると k の適当な分割 (5.106) に対し, それぞれに適当に $|Y_l|$ 個の格子点からなるヤング図を与え, さらに a_l を割り当てることで固定点を指定することになる.

初めに (5.103) を計算するために $\mathrm{Ch}\{V^*\otimes(T_1+T_2-1-T_1T_2)\}$ を計算すると

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}\{V^*\otimes(T_1+T_2-1-T_1T_2)\}&=\sum_l \sum_{(n_1,n_2)\in Y_l} e^{i(a_l+n_1\varepsilon_1+n_2\varepsilon_2)}(T_1+T_2-T_1T_2-1)\\&=-\sum_l T_{a_l}\sum_{j=0}^{k_{l,0}} T_1^j(T_1-1)(T_2^{\tilde{k}_{l,j}+1}-1)\end{aligned} \tag{5.107}$$

$$\text{または}\quad =-\sum_l T_{a_l}\sum_{i=0}^{\tilde{k}_{l,0}} T_2^i(T_2-1)(T_1^{k_{l,i}+1}-1) \tag{5.108}$$

となる. ここで, 前節でのヤング図は第 3 象限にある下向きだったが $(n_1,n_2)=(-j,-i)$ として上下左右をひっくり返し,「$k_{l,i}=$ヤング図 Y_l の i 行の格子点の数, $\tilde{k}_{l,j}=$ヤング図 Y_l の j 列の格子点の数」とした. (5.107) は要するに和のとり方を行を走らせてから列を走らせる形に書いて（「または」の式は逆に列を先に走らせてから行の和をとった）等比数列の和の公式を用いただけである. 次に同様に等比級数の公式から

$$\mathrm{Ch}\{V\}=\sum_l \sum_{(n_1,n_2)\in Y_l} e^{-i(a_l+n_1\varepsilon_1+n_2\varepsilon_2)}$$

$$=\sum_l T_{a_l}^{-1}\sum_{i=0}^{\tilde{k}_{l,0}} T_2^{-i}(1-T_1^{-(k_{l,i}+1)})(1-T_1^{-1})^{-1} \tag{5.109}$$

または $$=\sum_l T_{a_l}^{-1}\sum_{j=0}^{k_{l,0}} T_1^{-j}(1-T_2^{-(\tilde{k}_{l,j}+1)})(1-T_2^{-1})^{-1} \tag{5.110}$$

である．(5.107) と (5.109) をあわせると (5.103) が計算できて

$$\mathrm{Ch}\{(V^*\otimes V)\otimes(T_1+T_2-1-T_1T_2)\}$$

$$=\sum_{l,m} T_{lm}\sum_{j=0}^{k_{l,0}} T_1^j(T_2^{\tilde{k}_{l,j}+1}-1)\sum_{i=0}^{\tilde{k}_{m,0}} T_2^{-i}(T_1^{-(k_{m,i}+1)}-1)T_1 \tag{5.111}$$

または $$=\sum_{l,m} T_{lm}\sum_{i=0}^{\tilde{k}_{l,0}} T_2^i(T_1^{k_{l,i}+1}-1)\sum_{j=0}^{k_{m,0}} T_1^{-j}(T_2^{-(\tilde{k}_{m,j}+1)}-1)T_2 \tag{5.112}$$

となる．ただし，l,m はそれぞれヤング図を指定している．また $T_{lm}=T_{a_l}T_{a_m}^{-1}$ とおいた．

今まで前節のヤング図との対応で作ったように，原点から伸びていく格子点としてヤング図を扱っていた．しかし通常のヤング図は箱を並べていくため，ゼロから数えないで 1 から数える．図 5.14 のように，通常のヤング図に対応させるために

$$i\longrightarrow i-1,\quad j\longrightarrow j-1,\quad k_{l,i}\longrightarrow k_{l,i}-1,\quad \tilde{k}_{l,j}\longrightarrow \tilde{k}_{l,j}-1 \tag{5.113}$$

と置き換えると (5.112) は

$$(5.112)=\sum_{l,m} T_{lm}\sum_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}}\sum_{j=1}^{k_{m,1}}(T_1^{(k_{l,i}-j+1)}-T_1^{-j+1})(T_2^{-\tilde{k}_{m,j}+i}-T_2^i) \tag{5.114}$$

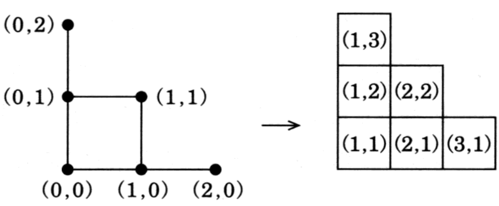


図 5.14　格子点としてのヤング図から通常のヤング図へ．

であることから，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ch}\{(V^*\otimes V)\otimes(T_1+T_2-1-T_1T_2)\}\\
&\quad=\sum_{l,m}T_{a_{lm}}\sum_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}}\sum_{j=1}^{k_{m,1}}\Big\{(T_1^{(k_{l,i}-j+1)}T_2^{-\tilde{k}_{m,j}+i}+T_1^{-j+1}T_2^{i})\\
&\qquad-(T_1^{(k_{l,i}-j+1)}T_2^{i}+T_1^{-j+1}T_2^{-\tilde{k}_{m,j}+i})\Big\}
\end{aligned}\tag{5.115}$$

が得られる．これによってヤング図から指標の計算が可能であり，固有値は指標から読み取ることができる．すなわち今の場合は各成分の無限小変換の固有値を得たいのであるから，(5.115) の指数から読み取ればよい．固有値を局所化公式に代入することで，(5.115) からの分配関数への寄与は（分子が「負」の方で，分母が「正」）

$$\prod_{m,l}\prod_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}}\prod_{j=1}^{k_{m,1}}\left(\frac{a_{lm}+\varepsilon_2(i-\tilde{k}_{m,j})+\varepsilon_1(1-j)}{a_{lm}+\varepsilon_2(i-\tilde{k}_{m,j})+\varepsilon_1(k_{l,i}-j+1)}\right)\left(\frac{a_{lm}+\varepsilon_2 i+\varepsilon_1(k_{l,i}-j+1)}{a_{lm}+\varepsilon_2 i+\varepsilon_1(1-j)}\right)\tag{5.116}$$

である．ただし $a_{lm}=a_m-a_l$ とした．

ヤング図が 0 のある格子点の座標の表示から，1 から始まる箱の表示に変わっていることに注意すると

$$\mathrm{Ch}\{W^*\}=\sum_{l}T_{a_l}\tag{5.117}$$

$$\mathrm{Ch}\{V\}=\sum_{l}T_{a_l}^{-1}\sum_{j=1}^{k_{l,1}}T_1^{-j+1}\sum_{i=1}^{\tilde{k}_{l,j}}T_2^{-i+1}\tag{5.118}$$

である．(5.109) では等比数列の和の公式を使っているが，(5.118) では和を実行する前の式であるだけで同じものだ．これらを使うと

$$\mathrm{Ch}(W^*\otimes V)=\sum_{l,m}T_{lm}\sum_{j=1}^{k_{m,1}}\sum_{i=1}^{\tilde{k}_{m,j}}T_1^{-j+1}T_2^{-i+1}\tag{5.119}$$

であるので，ここからの寄与は

$$\prod_{m,l}\prod_{j=1}^{k_{m,1}}\prod_{i=1}^{\tilde{k}_{m,j}}\{a_{lm}-\varepsilon_2(i-1)+\varepsilon_1(1-j)\}^{-1}\tag{5.120}$$

となる．

同様に

$$\mathrm{Ch}(V^{*}\otimes W\otimes T_1T_2)=\sum_{l,m}T_{a_{lm}}\sum_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}}\sum_{j=1}^{k_{l,i}}T_1^{-j}T_2^{-i} \tag{5.121}$$

でありここからの寄与は

$$\prod_{m,l}\prod_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}}\prod_{j=1}^{k_{l,i}}\{a_{lm}+\varepsilon_2 i+\varepsilon_1 j\}^{-1} \tag{5.122}$$

が得られる．

以上 (5.116), (5.120), (5.122) の結果から分配関数を書き下したものがネクラソフの公式と呼ばれる．それが

$$\begin{aligned}Z_k=&\prod_{m,l}\prod_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}}\prod_{j=1}^{k_{l,i}}\{a_{lm}+\varepsilon_2 i+\varepsilon_1 j\}^{-1}\\ &\times\prod_{m,l}\prod_{j=1}^{k_{m,1}}\prod_{i=1}^{\tilde{k}_{m,j}}\{a_{lm}-\varepsilon_2(i-1)+\varepsilon_1(1-j)\}^{-1}\\ &\times\prod_{m,l}\prod_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}}\prod_{j=1}^{k_{m,1}}\left(\frac{a_{lm}+\varepsilon_2(i-\tilde{k}_{m,j})+\varepsilon_1(1-j)}{a_{lm}+\varepsilon_2(i-\tilde{k}_{m,j})+\varepsilon_1(k_{l,i}-j+1)}\right)\\ &\times\prod_{m,l}\prod_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}}\prod_{j=1}^{k_{m,1}}\left(\frac{a_{lm}+\varepsilon_2 i+\varepsilon_1(k_{l,i}-j+1)}{a_{lm}+\varepsilon_2 i+\varepsilon_1(1-j)}\right)\end{aligned} \tag{5.123}$$

である．

次節以降はこの式を使ってサイバーグ-ウィッテン理論との対応をみるのであるが，実際にはさらに簡単な式として得ることができる [39], [62]．そのために (5.114) を以下の三つの和に分けて考える．

$$\sum_{l,m}T_{lm}\sum_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}}\sum_{j=1}^{k_{m,1}}\Big\{(T_1^{k_{l,i}-j+1}T_2^{-\tilde{k}_{m,j}+i}-T_1^{-j+1}T_2^{i}) \tag{5.124}$$

$$-T_1^{-j+1}(T_2^{-\tilde{k}_{m,j}+i}-T_2^{i}) \tag{5.125}$$

$$-(T_1^{k_i-j+1}-T_1^{-j+1})T_2^{i}\Big\} \tag{5.126}$$

以下，(5.124)(5.125)(5.126) について調べていく．

まず (5.125) について評価する．等比級数の公式を用い，

$$\sum_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}}(T_2^{-\tilde{k}_{m.j}+i}-T_2^i)=\sum_{i=1}^{\tilde{k}_{m,j}}(T_2^{-i+1}-T_2^{\tilde{k}_{l,1}-i+1})$$

と変形することで

$$(5.125)=\sum_{l,m}T_{lm}\sum_{j=1}^{k_{m,1}}T_1^{-j+1}\sum_{i=1}^{\tilde{k}_{m,j}}(T_2^{-i+1}-T_2^{\tilde{k}_{l,1}-i+1}) \tag{5.127}$$

となる．(5.117) と (5.118) から (5.127) の第 1 項は $\mathrm{Ch}\{W^*\otimes V\}$ であることから

$$(5.125)=-\mathrm{Ch}\{W^*\otimes V\}+\sum_{l,m}T_{lm}\sum_{j=1}^{k_{m,1}}\sum_{i=1}^{\tilde{k}_{m,j}}T_1^{-j+1}T_2^{\tilde{k}_{l,1}-i+1} \tag{5.128}$$

となる．

次に (5.126) に注目する．等比級数の和の公式から，

$$\sum_{j=1}^{k_{m,1}}(T_1^{k_{l,i}-j+1}-T_1^{-j+1})=\sum_{j=1}^{k_{l,i}}(T_1^j-T_1^{-k_{m,1}+j})$$

であることを用いて (5.125) の場合と同様に変形すると

$$(5.126)=-\mathrm{Ch}\{V^*\otimes W\otimes T_1T_2\}+\sum_{l,m}T_{lm}\sum_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}}\sum_{j=1}^{k_{l,i}}T_2^iT_1^{-k_{m,1}+j} \tag{5.129}$$

が得られる．

以上の結果をまとめると，(5.104) と (5.124)～(5.126), (5.128), (5.129) より

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}(\mathrm{Ker}b/\mathrm{Im}a)=(5.124)&+\sum_{l,m}T_{lm}\sum_{j=1}^{k_{m,1}}\sum_{i=1}^{\tilde{k}_{m,j}}T_1^{-j+1}T_2^{\tilde{k}_{l,1}-i+1}\\&+\sum_{l,m}T_{lm}\sum_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}}\sum_{j=1}^{k_{l,i}}T_2^iT_1^{-k_{m,1}+j}\end{aligned} \tag{5.130}$$

である．ここでもう一度注意しておくが，l と m でラベルされている二つのヤング図についての和になっており，図中の i 行 j 列の箱を (i,j) で表している．

(5.130) を以下では評価するのだが，少し工夫を施す．T_1 の正冪の部分と負または 0 乗の部分に分け，正冪の部分を R_+ と置き，その他の部分を $R_{0,-}$ とおく

ことにする．

$$\mathrm{Ch}(\mathrm{Ker}b/\mathrm{Im}a) = R_+ + R_{0,-} \tag{5.131}$$

(5.130) の中で R_+ に寄与しうる項は，

$$\sum_{l,m} T_{lm} \sum_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}} \sum_{j=1}^{k_{m,1}} T_1^{k_{l,i}-j+1} T_2^{-\tilde{k}_{m,j}+i} \tag{5.132}$$

$$\sum_{l,m} T_{lm} \sum_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}} \sum_{j=1}^{k_{l,i}} T_2^i T_1^{-k_{m,1}+j} \tag{5.133}$$

の 2 項だけである．T_1 の正冪だけ取り出したいので，$M_{m;l,i}$ を m で識別されるヤング図の 1 行目の箱の数 $k_{m,1}$ とヤング図 l の i 行目の箱の数 $k_{l,i}$ のうちで小さいものと等しい数とする．

$$M_{m;l,i} = \mathrm{Min}[k_{l,i}, k_{m,1}]$$

(5.132) から R_+ への寄与は

$$\sum_{l,m} T_{lm} \sum_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}} \sum_{j=1}^{M_{m;l,i}} T_1^{k_{l,i}-j+1} T_2^{-\tilde{k}_{m,j}+i} \tag{5.134}$$

で与えられる．一方 (5.133) からの R_+ への寄与は

$$\sum_{l,m} T_{lm} \sum_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}} \sum_{j=k_{m,1}+1}^{k_{l,i}} T_2^i T_1^{-k_{m,1}+j} \tag{5.135}$$

である．以下では今までとは異なり，i, j などは必ずしも一つのヤング図の中を走るとは限らないものとする．したがって $i > \tilde{k}_{l,1}$ の場合はヤング図 l の外なので $k_{l,i} = 0$ であると定義する．そうすると

$$\begin{aligned}\sum_{j=k_{m,1}+1}^{k_{l,i}} T_1^{-k_{m,1}+j} &= \sum_{j=M_{m;l,i}+1}^{k_{l,i}} T_1^{-M_{m;l,i}+j} \\ &= T_1 + T_1^2 + \cdots + T_1^{k_{l,i}-M_{m;l,i}} \\ &= \sum_{j=M_{m;l,i}+1}^{k_{l,i}} T_1^{k_{l,i}-j+1}\end{aligned} \tag{5.136}$$

とかけ，$j > k_{m,1}$ のときはヤング図の外なので $\tilde{k}_{m,j} = 0$ であることから，(5.135) の中の T_2^i は $T_2^{-\tilde{k}_{m,j}+i}$ と書くことができるので

$$\sum_{l,m} T_{lm} \sum_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}} \sum_{j=M_{m;l,i}+1}^{k_{l,i}} T_1^{k_{l,i}-j+1} T_2^{-\tilde{k}_{m,j}+i} \tag{5.137}$$

となる．(5.134) とあわせて，

$$R_+ = \sum_{l,m} T_{lm} \sum_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}} \sum_{j=1}^{k_{l,i}} T_1^{k_{l,i}-j+1} T_2^{-\tilde{k}_{m,j}+i} \tag{5.138}$$

が得られる．

次に $R_{0,-}$ についても同様に計算するのだが，計算を楽にするために和の取り方を以下のように変える．l と m を入れ替え，T_1 と T_2 を取り替えると同時に k と $\tilde{k}$ を入れ替えることで行と列の和の取り方を入れ替える．これによって Ch(Ker$b$/Ima) の表記 (5.130) を変え，

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}(\mathrm{Ker}b/\mathrm{Im}a) = &+ \sum_{l,m} T_{ml} \sum_{j=1}^{k_{m,1}} \sum_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}} (T_2^{\tilde{k}_{m,j}-i+1} T_1^{-k_{l,i}+j} - T_2^{-i+1} T_1^j) \\ &+ \sum_{l,m} T_{ml} \sum_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}} \sum_{j=1}^{k_{l,i}} T_2^{-i+1} T_1^{k_{m,1}-j+1} \\ &+ \sum_{l,m} T_{ml} \sum_{j=1}^{k_{m,1}} \sum_{i=1}^{\tilde{k}_{m,j}} T_1^j T_2^{-\tilde{k}_{l,1}+i}\end{aligned} \tag{5.139}$$

と表される．こうすると T_1 の冪が 0 または負になる可能性がある項は

$$\sum_{l,m} T_{ml} \sum_{j=1}^{k_{m,1}} \sum_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}} T_2^{\tilde{k}_{m,j}-i+1} T_1^{-k_{l,i}+j} \tag{5.140}$$

$$\sum_{l,m} T_{ml} \sum_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}} \sum_{j=1}^{k_{l,i}} T_2^{-i+1} T_1^{k_{m,1}-j+1} \tag{5.141}$$

である．これらに対して，R_+ の場合と同じように T_1 の冪が 0 または負になる項だけ取り出し書き換えてまとめると

$$R_{0,-} = \sum_{l,m} T_{ml} \sum_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}} \sum_{j=1}^{k_{l,i}} T_1^{-k_{l,i}+j} T_2^{\tilde{k}_{m,j}-i+1} \tag{5.142}$$

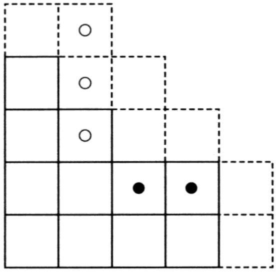


図 5.15　ヤング図．実線で表されるヤング図と点線のヤング図の二つのヤング図の組から情報を読みとり，分配関数が計算される．

となる．ただし，ここでもやはり i, j に関しては一つのヤング図の中だけを走るわけではないことに注意．(5.131), (5.138) と (5.142) から，最終的には

$$\mathrm{Ch}(\mathrm{Ker}b/\mathrm{Im}a)=\sum_{l,m}T_{lm}\sum_{s\in Y_l}T_1^{h(s)+1}T_2^{-r(s)} +\sum_{l,m}T_{ml}\sum_{s\in Y_l}T_1^{-h(s)}T_2^{r(s)+1} \tag{5.143}$$

となる．ただし s はヤング図の中の箱を表し，

$$h(s)=k_{l,i}-j, \quad r(s)=\tilde{k}_{m,j}-i \tag{5.144}$$

である．

図 5.15 は実線がヤング図 Y_l を表し点線はヤング図 Y_m を表すとする．$h(s)$ は図 5.15 の中の黒丸の数で $r(s)$ は白丸の数を表している．これによってヤング図から指標の計算が可能であり，固有値は対角成分から読み取ることができる．すなわち今の場合は各成分の無限小変換の固有値を得たいのであるから，(5.143) の指数から読み取ればよい．固有値は

$$E(s,m;l):=-a_l+a_m-\varepsilon_1 h(s)+\varepsilon_2(r(s)+1) \tag{5.145}$$

を用いて

$$E(s,m;l), \quad (E(s,m;l)-\varepsilon_+) \tag{5.146}$$

と読むことができる．局所化公式（定理 5.1）に代入するとインスタントン数 k

の分配関数が求まり

$$Z_k=\sum_{\{Y_l\}}\prod_m\prod_{s\in Y_m}\left\{\frac{1}{E(s,m;l)(E(s,m;l)-\varepsilon_+)}\right\} \tag{5.147}$$

が得られた．

5.2.6 分配関数

ここで一度計算結果をまとめておこう．前節ではネクラソフ自身の論文と違う表記となっているので，原論文にあたる読者は戸惑うかもしれない．この節以降ではネクラソフ-オクニコフ (A. Okounkov) [63] の論文に沿う表記を用いて，摂動論の結果も含めて書き下す．

分配関数のあらわな表式（ネクラソフの公式）は

$$Z(\mathbf{a};\varepsilon_1,\varepsilon_2,\Lambda)=Z^{\text{pert}}\sum_{\vec{\mathbf{k}}}\Lambda^{2N|\vec{\mathbf{k}}|}Z_{\vec{\mathbf{k}}}(\mathbf{a};\varepsilon_1,\varepsilon_2) \tag{5.148}$$

である．ただし

$$\begin{aligned}Z_{\vec{\mathbf{k}}}(\mathbf{a};\varepsilon_1,\varepsilon_2)&=\prod_{l,n;i,j}\frac{a_l-a_n+\varepsilon_1(i-1)+\varepsilon_2(-j)}{a_l-a_n+\varepsilon_1(i-\tilde{k}_{nj}-1)+\varepsilon_2(k_{li}-j)}\\&=\prod_{l,n;i,j}\frac{a_l-a_n+\varepsilon_1(-i)+\varepsilon_2(j-1)}{a_l-a_n+\varepsilon_1(\tilde{k}_{lj}-i)+\varepsilon_2(j-k_{ni}-1)}\end{aligned} \tag{5.149}$$

$$Z^{\text{pert}}(\mathbf{a};\varepsilon_1,\varepsilon_2,\Lambda)=\exp\left(\sum_{l,n}\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(a_l-a_n;\Lambda)\right) \tag{5.150}$$

である．ここで使われている記号は以下の通りである．左辺の引き数 $\mathbf{a}$ は $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_N)$ であり，前節の a_l と同じパラメータである．$\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ は

$$\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(x;\Lambda):=\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\frac{\Lambda^s}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{dt}{t}\,t^s\,\frac{e^{-tx}}{(e^{\varepsilon_1 t}-1)(e^{\varepsilon_2 t}-1)} \tag{5.151}$$

で与えられる関数である．Z^{pert} の導出はこの本書では行わないが [55]，1 章で行ったスカラー場の摂動論と本質的には変わらない．また，弦理論レベルの計算結果も含んでいるのだが，それについても本書では扱わない．

通常の一つのヤング図を表すために $\mathbf{k}$ を用いて

$$\mathbf{k}=(k_1,k_2,\cdots)\ :\ k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_n>0=k_{n+1}=k_{n+2}=\cdots$$

とし，i 列に積み上げた箱の数を k_i として表すことができる．グラフの箱の数（面積）を $|\mathbf{k}|=\sum_i k_i$ と表す．同じヤング図をたて方向と横方向の数え方を逆にし，j 行に並んでいる箱の数を $\tilde{k}_j$ とも書くことにする．言い換えると $\tilde{k}_i=\#\{j|i\leq k_j\}$ と書ける．これらは 2 次元に広がったヤング図であるが，(5.148) ではこれを N 層重ねたものとして $\vec{\mathbf{k}}$ を導入する．

$$\vec{\mathbf{k}}=(\mathbf{k}_1,\cdots,\mathbf{k}_N)$$

ここで $\mathbf{k}_l$ は l 層目のヤング図で

$$\mathbf{k}_l=(k_{l,1}\geq k_{l,2}\geq\cdots\geq k_{l,n_l}>k_{l,n_l+1}=0=\cdots)$$

である．$\vec{\mathbf{k}}$ のヤング図の列に使われる箱の数（面積）の総和が

$$|\vec{\mathbf{k}}|=\sum_{l,i}k_{l,i}$$

である．例を図 5.16 に挙げた．また無限乗積のままでは定義が定かではないのでそこを厳密に書くと，すでに前節で現れた (5.123) あるいは (5.147) で書き下すことができる．しかし，それを上の (5.149) の表記と比べるのは簡単ではない．(5.149) に近い形で，より自然に書き下したものは

$$Z_{\vec{\mathbf{k}}}=\prod_{m,l}\prod_{i=1}^{\tilde{k}_{m,1}}\prod_{j=1}^{k_{m,i}}\{a_{lm}-\varepsilon_1(i-\tilde{k}_{l,1})-\varepsilon_2 j\}^{-1}$$

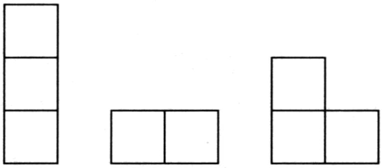


図 **5.16**　$\vec{\mathbf{k}}$ の例．$\mathbf{k}_1=(3,0,\cdots),\mathbf{k}_2=(1,1,0,\cdots),\mathbf{k}_3=(2,1,0,\cdots)$ である．$\vec{\mathbf{k}}=(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)$.

$$
\times \prod_{m,l} \prod_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}} \prod_{j=1}^{k_{l,i}} \{a_{lm} + \varepsilon_1(i-1) + \varepsilon_2(k_{l,i} - k_{m,1} - j)\}^{-1}
$$

$$
\times \prod_{m,l} \prod_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}} \prod_{j=1}^{k_{m,1}} \left(\frac{a_{lm} + \varepsilon_1(i-1) - \varepsilon_2 j}{a_{lm} + \varepsilon_1(i - \tilde{k}_{m,j} - 1) - \varepsilon_2(j - k_{l,j})} \right) \tag{5.152}
$$

である．(5.152) と (5.123) が同じであることは次節で見ることにする．

このように計算された分配関数は

$$
Z(\mathbf{a};\varepsilon_1,\varepsilon_2,\Lambda) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \mathcal{F}(\mathbf{a};\varepsilon_1,\varepsilon_2,\Lambda) \right) \tag{5.153}
$$

と書いたときに $\mathcal{F}$ は ε_i について解析的で $\varepsilon_i \to 0$ とできる．そしてなんと次の定理が示されるのである．

定理 5.4　ネクラソフ

$\mathcal{F}(\mathbf{a};0,0,\Lambda) \equiv \mathcal{F}_0$ がサイバーグ-ウィッテンのプレポテンシャルである．

このような驚異的な結果を得られるのも位相的場の理論の威力と非可換変形の重要性や可能性を物語っている．次の節でこの事実について詳しく見ていこう．

5.3　サイバーグ-ウィッテン理論の再現

この節ではネクラソフ-オクニコフ [63] に従って，

$$
\mathcal{F}_0 = \lim_{\varepsilon_i \to 0} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \log Z
$$

がサイバーグ-ウィッテンのプレポテンシャルであることの証明を見てみよう．つまり，

$$
\left\{ a_l, \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial a_l} \mid l = 1, \cdots, N \right\}
$$

がサイバーグ-ウィッテン理論でサイバーグ-ウィッテンカーブの周期積分で与えられたものに一致することを確かめるのが，この節の目的である．同じ事実の証明は中島と吉岡によっても同時期に与えられている [64]．数学者にはこちらの方が理解しやすいのかもしれない．

プロファイル関数

ヤング図を図 5.17 のように 45 度傾ける．そうするとヤング図の外郭を表す関数を

$$f_{\mathbf{k}}(x|\varepsilon_1,\varepsilon_2)=|x|+\sum_{i=1}^{\infty}[\,|x+\varepsilon_1-\varepsilon_2k_i-\varepsilon_1i|-|x-\varepsilon_2k_i-\varepsilon_1i|$$
$$-|x+\varepsilon_1-\varepsilon_1i|+|x-\varepsilon_1i|\,] \tag{5.154}$$
$$=|x|+\sum_{j=1}^{\infty}[\,|x+\varepsilon_2-\varepsilon_1\tilde{k}_j-\varepsilon_2j|-|x-\varepsilon_1\tilde{k}_j-\varepsilon_2j|$$
$$-|x+\varepsilon_2-\varepsilon_2j|+|x-\varepsilon_2j|\,] \tag{5.155}$$

として一般に表すことが可能だ．この関数をプロファイル関数と呼ぶことにする．

例えばごく簡単な例として $\mathbf{k}=\{k_1=1,k_2=0\}$ という 1 個の箱で作られる場合は

$$f_{\mathbf{k}}(x|\varepsilon_1,\varepsilon_2)=|x|+[\,|x-\varepsilon_2|-|x-\varepsilon_2-\varepsilon_1|-|x+\varepsilon_1-\varepsilon_1|+|x-\varepsilon_1|\,]$$

でありこれは確かに図 5.18 の箱 1 個のヤング図を表しているのがわかるだろう．

次に平行移動したプロファイル関数を

$$f_{a,\mathbf{k}}(x|\varepsilon_1,\varepsilon_2):=f_{\mathbf{k}}(x-a|\varepsilon_1,\varepsilon_2) \tag{5.156}$$

で定義し，N 個のヤング図を考えたときには

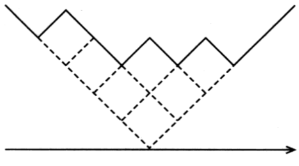


図 5.17　45 度傾いたヤング図．横軸が x で実線がプロファイル関数．

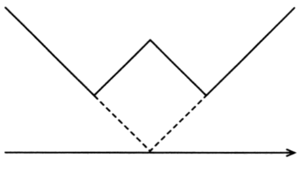


図 5.18　1 個の箱のヤング図に対応するプロファイル関数．

$$f_{\vec{a},\vec{\mathbf{k}}}(x|\varepsilon_1,\varepsilon_2):=\sum_l^N f_{a_l,\mathbf{k}_l}(x|\varepsilon_1,\varepsilon_2) \tag{5.157}$$

という関数を考えることにする．

この $f_{\vec{a},\vec{\mathbf{k}}}(x|\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ を用いて

$$Z_{\vec{\mathbf{k}}}(\vec{a},\varepsilon_i,\Lambda)=\exp\left\{-\frac{1}{4}\int dxdy\frac{d^2 f_{\vec{a},\vec{\mathbf{k}}}(x|\varepsilon_1,\varepsilon_2)}{dx^2}\frac{d^2 f_{\vec{a},\vec{\mathbf{k}}}(y|\varepsilon_1,\varepsilon_2)}{dy^2}\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(x-y;\Lambda)\right\} \tag{5.158}$$

と書ける[3]．(5.158) を示すのは以下のように計算すればよい．まず階段関数

$$\theta(x):=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

（階段関数の定義はより正確に arctan の極限などで定義すべき）を用いて，$|x|$ の微分が $2\theta(x)-1$ と書け，さらに $\theta(x)$ の微分がデルタ関数 $\delta(x)$ であることから

$$\begin{aligned} f''_{\vec{a},\vec{\mathbf{k}}}(x|\varepsilon_1,\varepsilon_2) &:= \frac{d^2 f_{\vec{a},\vec{\mathbf{k}}}(x|\varepsilon_1,\varepsilon_2)}{dx^2} \\ &= 2\sum_l\left\{\delta(x-a_l)+\sum_{i=1}^{\infty}[\delta(x-a_l+\varepsilon_1-\varepsilon_2 k_{l,i}-\varepsilon_1 i)\right. \\ &\quad \left. -\delta(x-a_l-\varepsilon_2 k_{l,i}-\varepsilon_1 i)-\delta(x-a_l+\varepsilon_1-\varepsilon_1 i)+\delta(x-a_l-\varepsilon_1 i)\ ]\right\} \end{aligned} \tag{5.159}$$

であるので，これを (5.158) の右辺に代入する．ディラックのデルタ関数なので x 積分は簡単に実行され

$$\begin{aligned} &\exp\left\{-\frac{1}{2}\int dy f''_{\vec{a},\vec{\mathbf{k}}}(y|\varepsilon_1,\varepsilon_2)\sum_l\Big(\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(a_l-y;\Lambda)\right. \\ &\quad +\sum_i[\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(a_l-\varepsilon_1+\varepsilon_2 k_{l,i}+\varepsilon_1 i-y;\Lambda)-\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(a_l+\varepsilon_2 k_{l,i}+\varepsilon_1 i-y;\Lambda) \\ &\quad \left. -\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(a_l-\varepsilon_1+\varepsilon_1 i-y;\Lambda)+\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(a_l+\varepsilon_1 i-y;\Lambda)]\ \Big)\right\} \end{aligned} \tag{5.160}$$

---

[3] この節で出てくる積分は正確には主値で与える．原点対称の $[-L,L]$ 区間で積分を定義し L を無限大にする極限で定義する．

となる．

ここで $\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ が次の差分方程式

$$\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(x;\Lambda)-\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(x-\varepsilon_1;\Lambda)=\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(x-\varepsilon_2;\Lambda)-\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(x-\varepsilon_1-\varepsilon_2;\Lambda)+\log\left(\frac{\Lambda}{x}\right) \tag{5.161}$$

を満たすという事実を $k_{l,i}$ 回用いて，

$$\begin{aligned}&-\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(a_l-\varepsilon_1+\varepsilon_2 k_{l,i}+\varepsilon_1 i-y;\Lambda)+\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(a_l+\varepsilon_2 k_{l,i}+\varepsilon_1 i-y;\Lambda)\\&-\sum_{n=1}^{k_{l,i}}\log\left(\frac{\Lambda}{a_l+\varepsilon_2 n+\varepsilon_1 i-y}\right)=-\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(a_l-\varepsilon_1+\varepsilon_1 i-y;\Lambda)+\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(a_l+\varepsilon_1 i-y;\Lambda)\end{aligned} \tag{5.162}$$

である．これを (5.160) に代入すると

$$\begin{aligned}\exp\Biggl\{-\frac{1}{2}\int dy f''_{\vec{a},\vec{\mathbf{k}}}(y|\varepsilon_1,\varepsilon_2)\sum_l\Biggl[\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(a_l-y;\Lambda)\\-\sum_i\sum_{n=1}^{k_{l,i}}\log\left(\frac{\Lambda}{a_l+\varepsilon_2 n+\varepsilon_1 i-y}\right)\Biggr]\Biggr\}\end{aligned} \tag{5.163}$$

が得られる．

同様にして (5.155) を用いてデルタ関数をつくり，y 積分も実行し，上と同様に差分方程式を繰り返し用いた式を代入するくだりを再び行うと

$$\exp\left\{-\sum_{m,l}\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(a_{lm};\Lambda)\right\}\Lambda^{2N|\vec{\mathbf{k}}|} \tag{5.164}$$

$$\times\prod_{m,l}\prod_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}}\prod_{j=1}^{k_{l,i}}\{a_{lm}+\varepsilon_1 i+\varepsilon_2 j\}^{-1} \tag{5.165}$$

$$\times\prod_{m,l}\prod_{j=1}^{k_{m,1}}\prod_{i=1}^{\tilde{k}_{m,j}}\{a_{lm}-\varepsilon_1(i-1)+\varepsilon_2(1-j)\}^{-1} \tag{5.166}$$

$$\times\prod_{m,l}\prod_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}}\prod_{j=1}^{k_{m,1}}\prod_{n=1}^{k_{l,i}}\left(\frac{a_{lm}+\varepsilon_1(i-\tilde{k}_{m,j})+\varepsilon_2(n-j)}{a_{lm}+\varepsilon_1(i-\tilde{k}_{m,j})+\varepsilon_2(n-j+1)}\right) \tag{5.167}$$

$$\times\prod_{m,l}\prod_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}}\prod_{j=1}^{k_{m,1}}\prod_{n=1}^{k_{l,i}}\left(\frac{a_{lm}+\varepsilon_1 i+\varepsilon_2(n-j+1)}{a_{lm}+\varepsilon_1 i+\varepsilon_2(n-j)}\right) \tag{5.168}$$

が得られる．

ここからは少々面倒だが難しくはない変形をする．真面目に導出したい読者のためにガイドラインを書くと，(5.167) についてはヤング図 l についての積 $\prod_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}}\prod_{n=1}^{k_{l,i}}$ を実行する．そのとき分子はヤング図の 1 行目に対応するところ，すなわち $n=1$ のところが残り，分母はヤング図の一番外の箱すなわち $n=k_{l,i}$ のところのみが残り，他は分母と分子でキャンセルする．同様に (5.168) もヤング図 l についての積を実行すると，分子は $n=k_{l,i}$, 分母は $n=1$ を残して後は約分で消すことができる．以上のプロセスで得られたものを書き出すと，

$$\exp\{-\sum_{m,l}\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(a_{lm};\Lambda)\}\Lambda^{2N|\vec{\mathbf{k}}|} \tag{5.169}$$

$$\times\prod_{m,l}\prod_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}}\prod_{j=1}^{k_{l,i}}\{a_{lm}+\varepsilon_1 i+\varepsilon_2 j\}^{-1} \tag{5.170}$$

$$\times\prod_{m,l}\prod_{j=1}^{k_{m,1}}\prod_{i=1}^{\tilde{k}_{m,j}}\{a_{lm}-\varepsilon_1(i-1)+\varepsilon_2(1-j)\}^{-1} \tag{5.171}$$

$$\times\prod_{m,l}\prod_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}}\prod_{j=1}^{k_{m,1}}\left(\frac{a_{lm}+\varepsilon_1(i-\tilde{k}_{m,j})+\varepsilon_2(1-j)}{a_{lm}+\varepsilon_1(i-\tilde{k}_{m,j})+\varepsilon_2(k_{l,i}-j+1)}\right) \tag{5.172}$$

$$\times\prod_{m,l}\prod_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}}\prod_{j=1}^{k_{m,1}}\left(\frac{a_{lm}+\varepsilon_1 i+\varepsilon_2(k_{l,i}-j+1)}{a_{lm}+\varepsilon_1 i+\varepsilon_2(1-j)}\right). \tag{5.173}$$

これは 5.2.5 節で求めた分配関数 (5.123) と一致していることがわかるであろう．

一方で (5.163) に対して (5.154) を用いて y 積分も同様に実行し，上と同様に差分方程式を繰り返し用いた式を代入するくだりを再び行うと

$$\exp\{-\sum_{m,l}\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(a_{lm};\Lambda)\}\Lambda^{2N|\vec{\mathbf{k}}|} \tag{5.174}$$

$$\times\prod_{m,l}\prod_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}}\prod_{j=1}^{k_{l,i}}\{a_{lm}+\varepsilon_1 i+\varepsilon_2 j\}^{-1} \tag{5.175}$$

$$\times\prod_{m,l}\prod_{i=1}^{\tilde{k}_{m,1}}\prod_{j=1}^{k_{m,i}}\{a_{lm}-\varepsilon_1(i-1)-\varepsilon_2(j-1)\}^{-1} \tag{5.176}$$

$$\times \prod_{m,l} \prod_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}} \prod_{j=1}^{k_{m,1}} \prod_{n=1}^{k_{l,i}} \left(\frac{a_{lm}+\varepsilon_1(i-j)+\varepsilon_2(n-k_{m,j})}{a_{lm}+\varepsilon_1(i-j+1)+\varepsilon_2(n-k_{m,j})} \right) \tag{5.177}$$

$$\times \prod_{m,l} \prod_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}} \prod_{j=1}^{k_{m,1}} \prod_{n=1}^{k_{l,i}} \left(\frac{a_{lm}+\varepsilon_1(i-j+1)+\varepsilon_2 n}{a_{lm}+\varepsilon_1(i-j)+\varepsilon_2 n} \right) \tag{5.178}$$

が得られる．(5.178) について $\prod_{j=1}^{k_{m,1}}$ を実行すると分子と (5.175) がキャンセルする．さらに (5.177) についてはヤング図 l についての積 $\prod_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}} \prod_{n=1}^{k_{l,i}}$ を実行する．そのとき分子はヤング図の 1 列目に対応するところ，すなわち $i=1$ のところが残り，分母はヤング図の一番外の箱すなわち $i=k_{l,n}$ のところのみが残り，他は分母と分子でキャンセルする．以上のプロセスで得られたものを l と m の順序を入れ替えた式に書き換えると，

$$\exp\left\{ -\sum_{m,l} \gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(a_{lm};\Lambda) \right\} \Lambda^{2N|\vec{\mathbf{k}}|} \tag{5.179}$$

$$\times \prod_{m,l} \prod_{i=1}^{\tilde{k}_{m,1}} \prod_{j=1}^{k_{m,i}} \{a_{lm}-\varepsilon_1(i-\tilde{k}_{l,1})-\varepsilon_2 j\}^{-1} \tag{5.180}$$

$$\times \prod_{m,l} \prod_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}} \prod_{j=1}^{k_{l,i}} \{a_{lm}+\varepsilon_1(i-1)+\varepsilon_2(j-1)\}^{-1} \tag{5.181}$$

$$\times \prod_{m,l} \prod_{i=1}^{\tilde{k}_{l,1}} \prod_{j=1}^{k_{m,1}} \left(\frac{a_{lm}+\varepsilon_1(i-1)-\varepsilon_2(j-k_{l,i})}{a_{lm}+\varepsilon_1(i-\tilde{k}_{m,j}-1)-\varepsilon_2(j-k_{l,j})} \right) \tag{5.182}$$

が得られる．これから (5.152) が導かれる（例えば等しいことは，$k_{m,1}=k_{l,i}$, $k_{m,1}>k_{l,i}$, $k_{m,1}<k_{l,i}$ に場合分けして比較することでわかる）．こうして (5.158) と (5.152) が等しいことが示され，また，前節の宿題であった (5.123) とも等しいことが示された．

(5.158) がネクラソフの分配関数と一致していることが理解されたので，サイバーグ-ウィッテンのプレポテンシャルになるはずの，その $\varepsilon \to 0$ の場合の評価を行う．特に以下では

$$\varepsilon_1/\varepsilon_2=-1 \quad \text{を保ったまま} \quad -\varepsilon_1=\varepsilon_2=\hbar \longrightarrow 0 \tag{5.183}$$

とすることを考える．ヤング図の足しあげをプロファイル関数の足しあげ $Z=\sum_f Z_f$ で書くことができることが理解できたから，それをヒントにする．

$$|\mathbf{k}|=\frac{1}{-2\hbar^2}\int dx(f_{a,\mathbf{k}}-|x-a|) \tag{5.184}$$

であることから $\hbar$ を 0 に近づけると，分配関数の計算の際に経路積分に大きく寄与する典型的なヤング図の箱の数が増加する（この節での積分は主値積分であることに注意せよ）．あるいはプロファイル関数を見てわかるように，ヤング図の箱の大きさが $\varepsilon_1\varepsilon_2$ に比例しているので箱のサイズが小さくなる．したがってこの極限でギザギザのプロファイル関数 $f_{\vec{a},\vec{\mathbf{k}}}=\sum_l f_{a_l,\mathbf{k}_l}$ がなだらかな経路

$$f(x):=\sum_l f_l(x-a_l)$$

となる．この滑らかな関数 f_l は，もとのヤング図の性質から，十分大きな x に対して $g(x)=|x|$ で，$|g(x)-g(y)|\leq|x-y|$，$\int dxg'(x)=0$，$\int dx(g(x)-|x|)<\infty$ を満たす関数の全体 $\{g(x)\}$ に含まれる．

プロファイル関数についての足しあげを f についての経路積分としてかく．積分測度の詳細はわからないがとにかくそれを $\mathcal{D}f$ と書くと

$$Z=\int\mathcal{D}fe^{-\mathcal{E}(f)} \tag{5.185}$$

$$\mathcal{E}(f):=\frac{1}{4}\int_{y<x}dxdyf''(x)f''(y)(x-y)^2\left\{\log\frac{x-y}{\Lambda}-\frac{3}{2}\right\} \tag{5.186}$$

となる．ここで $-\varepsilon_1=\varepsilon_2$ のときに $\gamma_\hbar:=\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ と書くことにした場合，$\gamma_\hbar$ の $\hbar\to 0$ のリーディングが

$$\gamma_\hbar(x)=\hbar^{-2}\left(\frac{1}{2}x^2\log\frac{x}{\Lambda}-\frac{3}{4}x^2\right)+O(\hbar^0)$$

で与えられることを用いた．部分積分を行い，主値積分であることを注意して丁寧に表面項も計算すると

$$\mathcal{E}(f)=-\frac{1}{2}\int_{x<y}(N+f'(x))(N-f'(y))\log\left(\frac{y-x}{\Lambda}\right)dxdy \tag{5.187}$$

が得られる．ここで $x\to\infty$ で $f_l(x)\to|x|$ だったので $f(x)=\sum f_l\to N|x|$ であることを用いている．こうして導入されたある種のエネルギー汎関数 $\mathcal{E}(f)$ が停留値をとる場合に $\mathcal{F}$ と書く．

$$\min\mathcal{E}(f)=\mathcal{F} \tag{5.188}$$

後でわかるように，この $\mathcal{F}$ がプレポテンシャルを与えることになる．

次にエネルギー関数 $\mathcal{E}(f)$ に N 個の未定係数 ξ_m を用いて $\sum\xi_m a_m$ を加え，ルジャンドル変換を導入する．

$$S_\Lambda(f)=-\mathcal{E}(f)-\sum_l^N\xi_l a_l \tag{5.189}$$

この節の最後にわかることだが，このルジャンドル変換は，サイバーグ-ウィッテン理論で，プレポテンシャル $\mathcal{F}$ のルジャンドル変換で双対なプレポテンシャル $\mathcal{F}_D$ を定義したことに対応している．ゲージ群として $SU(N)$ を考えている場合は a_l はそのリー代数の対角成分であるので $\sum a_l=0$ である．実は a_l はヒッグス場の期待値に相当している．同様に $\sum\xi_l=0$ という条件を付けておく．

また以下の都合上，隣合う a_l と a_{l+1} 同士は十分離れているとする．$\sum\xi_m a_m$ のままでは後でサイバーグ-ウィッテン理論の a や a_D との対応を見るのが難しいので面のテンションと呼ばれる $[N,-N]$ で定義された次のような関数 $\sigma(x)$ を導入しよう．

$$-N+2(l-1)\le x\le -N+2l$$

である x に対して

$$\frac{d\sigma(x)}{dx}=\xi_l \tag{5.190}$$

であり，

$$\sigma(-N)=\sigma(N)=0 \tag{5.191}$$

を満たすものと定義する．これを用いると

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}dx\ \sigma(f'(x))=\sum_l\xi_l a_l \tag{5.192}$$

と書き表すことができる．ただし $f'=df/dx$ としている．

証明 プロファイル関数 $f_l(x-a_l)$ は十分遠方から見ると $|x-a_l|$ であるから主値積分では

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} dx\ xf_l''(x-a_l)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} dx\ f_l'(x-a_l)=-\frac{1}{2}|x-a_l|\Big|_{-E}^{E}=a_l \tag{5.193}$$

である．ただし E は主値積分の両端を表している．ヤング図をなだらかにして崩してある部分の前後，すなわち a_l から十分幅をとった前後で $f'(x)=\sum_l f_l'(x-a_l)$ は，$-N+2(l-1)$ から $-N+2l$ に変化することから，$\sigma'(f'(x))=\xi_l$ である（図 5.19 (p271) 参照）．これらを用いると

$$\begin{aligned}\sum_l \xi_l a_l &= \sum_l \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_l} dx\ \sigma'(f'(x))xf_l''(x-a_l)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} dx\ \sigma'(f'(x))f''(x)x\\ &=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} dx\frac{dy}{dx}\frac{d\sigma}{dy}x \qquad (\text{ただし} y=f'(x)) &(5.194)\\ &=-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} dx\ \sigma(f'(x)) &(5.195)\end{aligned}$$

ここで，$\mathbb{R}_l$ は a_l を挟む実軸上の適当な区間を表し，最後の行は部分積分を行った． ■

準備ができたのでさっそく停留点を与える条件を求めていこう．

$$S_\Lambda(f)=-\mathcal{E}(f)+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} dx\ \sigma(f'(x)) \tag{5.196}$$

の変分をとると

$$\begin{aligned}\delta S_\Lambda(f)=&-\frac{1}{2}\int dx\int_{y\neq x}\delta f'(x)\left\{f''(y)(y-x)\left\{\log\left(\frac{|y-x|}{\Lambda}\right)-1\right\}\right\}\\ &+\frac{1}{2}\int dx\delta f'(x)\ \sigma'(f'(x)) &(5.197)\end{aligned}$$

となるので

$$\sigma'(f'(x))=\int_{y\neq x} f''(y)(y-x)\left\{\log\left(\frac{|y-x|}{\Lambda}\right)-1\right\}\equiv[\mathbb{X}f](x) \tag{5.198}$$

が停留点の条件であることがわかる．条件の右辺の積分変換を $[\mathbb{X}f](x)$ と以下では書くことにする．この停留条件は次の二つの条件が満たされれば満足される条件である．

$$[\mathbb{X}f](x)=\xi_l \quad \Longleftrightarrow \quad -N+2(l-1)<f'(x)<-N+2l \tag{5.199}$$

$$\xi_l>[\mathbb{X}f](x)>\xi_{l+1} \quad \Longleftrightarrow \quad f'(x)=-N+2l \tag{5.200}$$

以下では，この条件が満たされることとサイバーグ-ウィッテン理論の関係を見ていくことにしよう．

サイバーグ-ウィッテン理論の章（2 章）で見たようにゲージ群が $SU(N)$ の場合は，

$$P_N(z):=z^N+\cdots, \qquad P_N^2(z)-4\Lambda^{2N}=\prod_{l=1}^{N}(z-\alpha_l^-)(z-\alpha_l^+) \tag{5.201}$$

とおいたとき，サイバーグ-ウィッテン曲線は $w\in\mathbb{C}$ を用いて以下で定義されていた．

$$\Lambda^N\left(w+\frac{1}{w}\right)=P_N(z) \tag{5.202}$$

p272 の図 5.20，図 5.21（図 2.1 も参照）は $N=2$ の場合であるが，1 枚の z 平面は N 枚の P_N 平面に対応し，z 平面の N 本のカット $[\alpha_l^-,\alpha_l^+]$ が P_N 平面では $[-2\Lambda^N,2\Lambda^N]$ の一つのカットとなる．

以下では簡単のため，カットは実軸上にあるとし，$\cdots<\alpha_l^-<\alpha_l^+<\alpha_{l+1}^-<\alpha_{l+1}^+<\cdots$ の順序をつける．(5.202) の二つの解を $w_\pm$ とすると以下の複素数

$$\frac{P_N\pm\sqrt{P_N^2-4\Lambda^{2N}}}{2\Lambda^N} \tag{5.203}$$

で与えられる．$w_+w_-=1$ であることに注意して半径が小さい方を w_- とすると，1 枚の P_N 平面から $|w_-|<1$ の開円への写像を定義している．次に

$$\Phi(z):=\frac{2}{\pi i}\log(w_-)+N \tag{5.204}$$

を導入する．ただし分枝を選ぶために，∞ の近傍で

$$\Phi=N+\frac{2N}{\pi i}\log\frac{\Lambda}{z}+O\left(\frac{1}{z}\right) \tag{5.205}$$

とする．Φ は z 平面から幅が $[-N,N]$ の上半面上の領域 Δ への写像である（図 5.23 (p272) 参照）．この Φ の境界値を用いて

$$\varphi(x):=\Phi(x+i\varepsilon) \quad x\in\mathbb{R} \tag{5.206}$$

を定義する．以下では Φ もこれによって実軸全体に定義された関数として扱う．カットの位置は

$$\varphi^{-1}([-N,N])=\bigcup_{l=1}^{N}[\alpha_l^-,\alpha_l^+] \tag{5.207}$$

の対応となっている．z 平面の実軸のうち $[\alpha_l^-,\alpha_l^+]$ をバンド，その間の部分 $[\alpha_l^+,\alpha_{l+1}^-]$ をギャップと呼ぶことにする．これらを用いて以下の定理によってサイバーグ-ウィッテン理論とネクラソフの分配関数が結びつく．

定理 5.5 ネクラソフ-オクニコフ

すでに出てきたラグランジアン未定係数 ξ_l を $\xi_1>\cdots>\xi_N$ で与える．(5.204) で定義された Φ は z の実軸を領域 Δ の境界と（図 5.23 (p272) のような）$N-1$ 本の垂直なスリットに写像する．そのスリットの高さを η_l とすると，η_l が一意に決定される．$\varphi(x)$ の実部を用いて，あるプロファイル関数 $f_\star=\sum_l f_l(x-a_l)$ の微分が

$$f_\star'(x):=\mathrm{Re}\ \varphi(x) \tag{5.208}$$

で与えられているなら，$f_\star(x)$ が $S_\Lambda(f)$ の停留点を与える．すなわち (5.199) と (5.200) の条件を満たす．

証明 (5.204) を微分した $\Phi'=\partial_z\Phi=\dfrac{2}{\pi i}\dfrac{\partial_z w}{w}$ に，(5.202) と (5.201) を代入すると

$$\partial_z\Phi(z)=\frac{2}{\pi i}\frac{\partial_z P_N}{\sqrt{\prod_l(z-\alpha_l^+)(z-\alpha_l^-)}} \tag{5.209}$$

であるから，根号の中に注意すると，Φ' はバンドで実数，ギャップで純虚数で与えられることがわかる．

$$x \in [\alpha_l^-, \alpha_l^+] \quad のとき \quad \mathrm{Im}\,\Phi'(x) = \mathrm{Im}\,\varphi'(x) = 0 \tag{5.210}$$

$$x \in [\alpha_l^+, \alpha_{l+1}^-] \quad のとき \quad \mathrm{Re}\,\Phi'(x) = \mathrm{Re}\,\varphi'(x) = 0 \tag{5.211}$$

つまり $f''_\star$ の台はバンドにあり，ギャップでは 0 である．Φ' を

$$\Phi'(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} dx\ \frac{\mathrm{Re}\,\varphi'(x)}{x-z} = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} dx\ \frac{f''_\star(x)}{x-z} \tag{5.212}$$

と表せる．

分散公式

$$\frac{1}{\pi}\int dy \frac{\mathrm{Re}\,\varphi'(x)}{y-x} = -\mathrm{Im}\,\varphi'(x) \tag{5.213}$$

と (5.198) を 2 階微分して得られる式を用いると

$$\begin{aligned}[\mathbb{X}f_\star]'(x) &= \int dx [\mathbb{X}f_\star]''(x) = \int dx \int dy \frac{\mathrm{Re}\,\varphi'(x)}{y-x} \\ &= -\pi \int dx \mathrm{Im}\,\varphi'(x) + C \end{aligned} \tag{5.214}$$

が得られる．C は定数である．一方で，$x \to \infty$ で $f(x) \to N|x|$ であることと (5.205) の条件から，(5.198) の微分は

$$[\mathbb{X}f_\star]'(x) = 2N \log \frac{\Lambda}{|x|} + O\left(\frac{1}{x}\right) \tag{5.215}$$

と得られるので，定数は $C=0$ であることがわかる．したがって

$$[\mathbb{X}f_\star]'(x) = -\pi \mathrm{Im}\,\varphi(x) \tag{5.216}$$

である．(5.210) で見たように，右辺はバンド上では 0 であった．ギャップではどうだろう？ (5.204) から

$$\Phi(z) = \left(\frac{2\mathrm{Arg}(w_-)}{\pi} + N\right) + i\left(\frac{-2\log|w_-|}{\pi}\right) \tag{5.217}$$

であるが，$|w_-| < 1$ であるので $\mathrm{Im}\,\Phi(z) > 0$, すなわち $\mathrm{Im}\,\varphi > 0$ であることがわかる．したがって

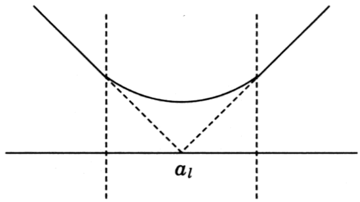


図 5.19　$f_l(x-a_l)$ の様子.

$$[\mathbb{X}f_\star](x)=\begin{cases}\text{単調減少}, & (x\in\text{ギャップ})\\ \text{定数}\xi_l, & (x\in l\text{ 番目のバンド})\end{cases} \tag{5.218}$$

次に $f'_\star$ の振る舞いについて考察する．ギャップで $f'_\star$ すなわち Re φ が定数であった．つまりバンドではヤング図をなだらかにした関数で f'_l がいろいろ変化するわけであるが，間のギャップでは $f_l=|x-a_l|$ として扱えるのでグラフの傾きが変化しないわけである（図 5.19）．

定数はグラフの傾きであるから，l 番目のバンドと $l+1$ 番目のバンドの間のギャップにおける $f'_\star$ の値は $-N+2l$ である．バンドでの振る舞いは (5.217) から，$f'_\star$ すなわち Re $\varphi=N+2\mathrm{Arg}(w_-)/\pi$ について見ればよい．簡単のために $N=2$ の場合について書いた図 5.20, 図 5.21, 図 5.22, 図 5.23 を見てみよう．

ギャップ上で矢印に従って z 平面を実軸の正の方向へ移動すると，P_N 平面では重なっているが，w 平面では再び分かれて円周上を移動する．w 平面では円の外側が w_+, 内側が w_- の領域である．$r\gg 1$ として $w_+=re^{i\theta}$, $w_-=\dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$ について考える．このとき

$$P_N/\Lambda^N=w+1/w=w_++w_-\sim w_+$$

としていい．z 平面の第一象限を実軸の正の方向（バンド 2 の矢印の方向）へ移動すると，P_N 平面で上半平面を正の方向へ，w 平面では w_+ は円の外側を $\pi>\theta>0$ の範囲を θ が減少する時計回りに移動する．z 平面の第四象限についても同様で，θ が減少する方向に移動することがわかる．したがって Arg $w_-=-\theta$ はバンドでは単調増加である，つまり $f'_\star$ が単調増加であることがわかる．

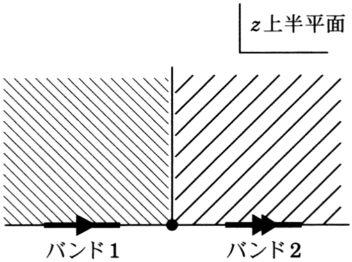


図 5.20　$N=2$ の場合は二つのカット（バンド）が存在する．上半平面が P_N では全平面に写像される．

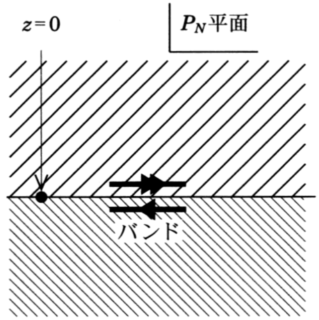


図 5.21　図 5.20 の z 平面の二つのバンドが重なっている．●は z 平面の原点に対応している．

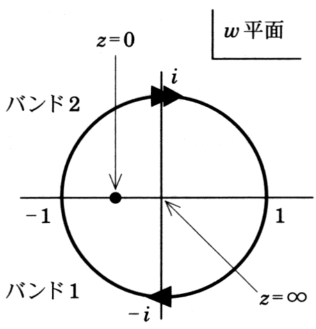


図 5.22　円内に写像される．図 5.20 の二つのカットが円周上に，上半面の半周と下半面の半周として存在する．

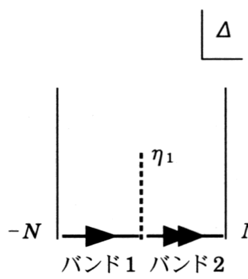


図 5.23　$N=2$ の場合，二つのバンドの間にギャップに対応するスリットが入る．

表 5.1

x	$\cdots$	ギャップ	バンド	ギャップ	バンド	$\cdots$
$f'_\star(x)$	$\cdots$	$-N+2(l-1)$	単調増加	$-N+2l$	単調増加	$\cdots$
$[\mathbb{X}f_\star](x)$	$\cdots$	単調減少	ξ_l	単調減少	ξ_{l+1}	$\cdots$

$$f'_\star(x)=\begin{cases} -N+2l, & (x\in \text{ギャップ（}l\text{ 番目と }l+1\text{ 番目のバンドの間）}) \\ \text{単調増加}, & (x\in\text{バンド}) \end{cases} \tag{5.219}$$

(5.218) と (5.219) の結果は (5.199) と (5.200) の極値を与える条件を満たすことを意味している．

最後に任意の ξ_l の組に対して，スリットの高さ η_l が決まることを示す．

$$\varphi(x)=f'_\star(x)+\frac{1}{\pi i}[\mathbb{X}f]'(x)$$

であるから

$$\eta_l=\max\left\{\left|\frac{1}{\pi}[\mathbb{X}f]'(x)\right|\right\},\quad x\in l\text{ 番目のギャップ} \tag{5.220}$$

と選びたいのであるが，それが任意の ξ_l に対して可能であるかどうか調べる必要がある．(5.220) から，η_l が 0 に近づくと $[\mathbb{X}f](x)$ の傾きが 0 に近づくので，ギャップの両端の値も近づき，$\xi_l-\xi_{l+1}=0$. 同様に無限大に近づく場合を考えても $\xi_l-\xi_{l+1}\to\infty$ がわかり，どのような ξ_l の組に対しても順に η_l を決めていくことができることがわかる．こうして定理 5.5 の証明が完成した． ■

まとめると，表 5.1 のようになる．

いよいよサイバーグ-ウィッテン理論を再現できることを示すことにしよう．つまり定理 5.4 の証明である．

定理 5.4 の証明　初めに a_l をサイバーグ-ウィッテン曲線から得られることを示す．(5.193) より

$$
\begin{aligned}
a_l &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} dx\ x f_l''(x-a_l) = -\frac{1}{4\pi i}\oint_{\alpha_l} dz\ z\int_{\mathbb{R}} dx\ \frac{f_l''(x)}{z-x} \\
&= -\frac{1}{4\pi i}\oint_{\alpha_l} dz\ z\int_{\mathbb{R}} dx\ \frac{f_\star''(x)}{z-x} = \frac{1}{4}\oint_{\alpha_l} dz\ z\Phi'(z) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\alpha_l} dz\ z\frac{w'}{w} \\
&= \oint_{\alpha_l} ds \quad ただし \quad ds := \frac{1}{2\pi i} z\frac{dw}{w} \quad とした． \qquad (5.221)
\end{aligned}
$$

2 番目の等号は $1/(z-x)$ を展開して留数積分を用いた．カット $[\alpha_l^-,\alpha_l^+]$ を含み他のカットを含まない反時計回りのサイクルを α_l で表している（図 2.1 のサイクルの絵参照）．3 番目の等号は，サイクル α_l での積分は $n\neq l$ では $f_l''(x-a_n)=0$ なので，$f_l''(x-a_l)$ を $f_\star''(x)=\sum_n f_l''(x-a_n)$ と置き換えても変わらないということを使った．4 番目の等号は (5.212) を用いた．(5.204) の定義から $\Phi'=2w'/\pi i w$ より 5 番目の等号が導かれる．こうしてサイバーグ-ウィッテン曲線上の積分 (2.73) と一致していることがわかった．

次に 2 章の a_{Dl} に対応するチャージ $\xi_{l+1}-\xi_l$ を，a_l 同様に ds で周期積分 ((2.73) 参照）することで得られることを見てみよう．(5.218) によると端点が ξ_l そのものなので，ギャップに沿って $[\mathbb{X}f]'$ を積分するところから出発しよう．

$$
\begin{aligned}
\xi_{l+1}-\xi_l &= \int_{\alpha_l^+}^{\alpha_{l+1}^-} dx\ [\mathbb{X}f]' = -\pi\int_{\alpha_l^+}^{\alpha_{l+1}^-} dx\ \mathrm{Im}\ \varphi = \pi\int_{\alpha_l^+}^{\alpha_{l+1}^-} xd(\mathrm{Im}\ \varphi) \\
&= -\pi i\int_{\alpha_l^+}^{\alpha_{l+1}^-} xd\varphi = -\frac{\pi i}{2}\oint_{\beta_l} zd\Phi \\
&= -2\pi i\oint_{\beta_l} ds \qquad (5.222)
\end{aligned}
$$

2 番目の等号は (5.216) を用い，3 番目の等号は部分積分し端点で $\mathrm{Im}\ \varphi=0$ を用いた．4 番目の等号はギャップ上で $\mathrm{Re}\ \varphi=0$ を用い，5 番目の等号は線積分を周積分に置き換えた．β_l は l 番目のカット（バンド）と $l+1$ 番目のカットをまわるサイクルで，この周積分はサイバーグ-ウィッテン理論の β サイクルに対応し

ている（図 2.1 参照）．最後の等式は (5.221) と同様である．拘束条件 $\sum\xi_l=0$ を用いると全ての ξ_l が決まる．

以上のように，a_l と ξ_l（2 章では a_{Dl} で記述した）がサイバーグ-ウィッテン曲線から計算されることを示された．

最後にサイバーグ-ウィッテン理論の双対な関係で a_l と ξ_l が与えられることを確認しよう．$S[f_\star]$ の無限小変化は以下のように得られる．

$$\begin{aligned}\delta S[f_\star]&=\frac{1}{2}\int(\delta\sigma)'(f_\star')dx=-\frac{1}{2}\int(\delta\sigma)'(xf_\star'')dx\\&=-\frac{1}{2}\left(\sum_l\int_{G_l}+\sum_l\int_{B_l}\right)(\delta\sigma)'(xf_\star'')dx.\end{aligned}\tag{5.223}$$

ここで 2 番目の等式には部分積分を用い，3 番目の等式は積分領域をバンドとギャップに分けた．l 番目のバンドを B_l, l 番目のギャップを G_l で書いている．ギャップでは $f_\star'$ は定数であることと，バンドで $\sigma'[f_\star']=\xi_l$ なので $\delta\sigma'[f_\star']=\delta\xi_l$ となることを用い

$$\begin{aligned}\delta S[f_\star]&=-\frac{1}{2}\sum_l\int_{B_l}(\delta\xi_l)xf_\star''(x)\ dx\\&=\frac{1}{4}\sum_l(\delta\xi_l)\oint_{\alpha_l}zd\Phi(z)\end{aligned}\tag{5.224}$$

となる．最後の等式は $f_\star''(x)=\mathrm{Re}\ \varphi'(x)$ であることと，バンド上で $\mathrm{Re}\ \varphi'(x)=\varphi'(x)$ であり $\Phi(x+i\varepsilon)=\varphi(x)$ であることを用いた．(5.204) から $d\Phi=2dw/\pi iw$ であることを用いると

$$\delta S[f_\star]=\sum_l(\delta\xi_l)\oint_{\alpha_l}ds\tag{5.225}$$

となる．この結果

$$\frac{\partial S[f_\star]}{\partial\xi_l}=\oint_{\alpha_l}ds=a_l\tag{5.226}$$

が得られた．

したがって，(5.188) 式で述べた通り停留点でプレポテンシャルを与えている．すなわち，

$$S[f_\star]=\mathcal{F}_D, \qquad \mathcal{E}[f_\star]=\mathcal{F} \tag{5.227}$$

であることが証明された． ■

5.4 ネクラソフの公式への高次元からのアプローチ

前節までの詳細な計算によって実際にサイバーグ-ウィッテン理論を再現してみたわけであるが，なぜプレポテンシャルがネクラソフの分配関数と (5.153) $Z=\exp(-\mathcal{F}/\varepsilon_1\varepsilon_2)$ の関係で結びつくのかはまだ説明していない．どのようにしてこの予想を立てたのかがわからないと，腑に落ちない読者も多いだろう．実はこの章で計算したネクラソフの公式は，$\mathcal{N}=2$ 超対称 4 次元ゲージ理論のある Ω 背景と呼ばれる背景計量のもとでの理論が背後に存在する．さらにその理論は，5 次元あるいは 6 次元のゲージ理論を介して自然に理解できる．これを見ていくことで $Z=\exp(-\mathcal{F}/\varepsilon_1\varepsilon_2)$ がなぜ現れるかが理解される．この節では詳しい計算は省略するので，知りたい読者は [54] あるいは [65] などを参照されたし．

出発点のラグランジアンは 2 章や 3 章でみた 4 次元の $\mathcal{N}=2$ 超対称ヤン-ミルズ理論で，

$$\frac{1}{4}\mathrm{tr}\left\{-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-2D_\mu\phi D^\mu\bar{\phi}-[\phi,\bar{\phi}]^2+\cdots\right\} \tag{5.228}$$

であった[4)]．上の作用は 2 章とは異なる方法で構成することができる．6 次元の時空上の $\mathcal{N}=1$ のゲージ理論から構成するのである．6 次元の空間を $\mathbf{T}^2\times\mathbb{R}^4$ とし，その 2 次元トーラスの座標依存性を無くすことで得られるものだ．こういった手法は「次元リダクション」と呼ばれている．超対称が沢山ある理論を作る常套手段として，より高い次元の超対称理論を次元リダクションすることで $\mathcal{N}>1$ の超対称理論を作るというものである．

次元リダクションについて少し詳しく説明しよう．次元リダクションとは，作用の中でリダクションする空間の微分を落とし，その方向のベクトルをスカラー

4) ここでは非可換時空ではなく可換な時空で記述する．最終的に対応を見るには非可換空間上の場の理論として読み替える必要があるが，その点に関しては特に触れない．

で読み替える操作で低い次元のラグランジアンを作ることだ．例えば 6 次元の非可換のゲージ理論の作用を 4 次元に次元リダクションする方法を具体的に書いてみよう．6 次元のゲージ場 A_i $(i=1,\cdots,6)$ を 4 次元のゲージ場 A_μ $(\mu=1,\cdots,4)$ と 2 個のスカラー場 ϕ_1,ϕ_2 と見なすと，

$$\int d^6x\mathrm{tr}\ F_{ij}F^{ij} \longrightarrow \int d^4x\mathrm{tr}\left\{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\sum_{i=1}^{2}D_\mu\phi_i D^\mu\phi_i+[\phi_1,\phi_2]^2\right\}$$

のように 4 次元の理論が得られる．(5.228) の中の $\phi,\bar{\phi}$ は ϕ_1,ϕ_2 を複素に組んで得られる．次元リダクションを行うと超対称性が一般に大きくなるのである．というのは超対称性の生成子はスピノルなわけだが，スピノルを構成するのに必要な成分は空間の次元が小さいほうが少なくてすむ．次元リダクションで超対称生成子の成分の数が変化しないので，スピノルの数は低い次元では増えるからである．

このように，素朴に 6 次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称ヤン-ミルズ理論を 4 次元にリダクションしたラグランジアンとして (5.228) のラグランジアンを得ることができる．しかし，5.2.1 節でも述べている通り，平坦な $\mathbb{R}^4$ 上ではトポロジカルツイスト後にオブザーバブルが存在しないことからこのままでは分配関数を計算すると 0 になってしまう．そのために以下で少し工夫してみる．

Ω-背景

非自明な 6 次元計量を持つ理論から出発して次元リダクションを行ってもいい．$\mathbb{R}^4$ に非自明な平坦 $SO(4)$ 接続をもつものとして，以下の計量を持つとする．

$$ds^2=dzd\bar{z}+g_{\mu\nu}(dx^\mu+V^\mu dz+\bar{V}^\mu d\bar{z})(dx^\nu+V^\nu dz+\bar{V}^\nu d\bar{z}) \tag{5.229}$$

$z,\bar{z}$ はトーラスの座標で x^μ が $\mathbb{R}^4$ の座標である．トーラスの面積を 0 に持っていくことで 4 次元にリダクションするというシナリオは前と同じである．$V^\mu=\Omega^\mu{}_\nu x^\nu$, $\bar{V}^\mu=\bar{\Omega}^\mu_\nu x^\nu$ とするならば，$[\Omega,\bar{\Omega}]=0$ のときはこの計量は平坦となるので，この条件を要請する．作用はベクトル場 V と $\bar{V}([V,\bar{V}]=0)$ に結合し，4 次元にリダクションしたものは以下のように変更される．

$$\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}(D_\mu\phi+V^\rho F_{\rho\mu})(D^\mu\bar{\phi}+\bar{V}^\rho F_\rho{}^\mu)+\frac{1}{4}[\phi,\bar{\phi}]^2\ +\cdots \tag{5.230}$$

この作用の変形として，非自明なオブザーバブルが自動的に入るのである．しかし，このように変形を受けた理論はコホモロジカル位相的場の理論のような良い性質が保たれているのだろうか．次にこのことについて考えてみる．

ローレンツ対称性と R-対称性をあわせると $SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(2)_I$ であった．二つの無限小パラメータ ζ^i_α と $\bar{\zeta}^i_{\dot{\alpha}}$ に対して $\mathcal{N}=2$ 超対称変換は

$$
\begin{aligned}
\delta A_\mu &= -i\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_i \sigma_{\mu\alpha\dot{\alpha}}\zeta^{\alpha i} - i\lambda^{\alpha i}\sigma_{\mu\alpha\dot{\alpha}}\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}_i \\
\delta\lambda_{\alpha i} &= \sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\zeta^{\beta i}F_{\mu\nu} + i\zeta^i_\alpha\phi + i\sqrt{2}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}D_\mu\phi\varepsilon^{ij}\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}_j \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{5.231}
$$

であった（1.7 節参照）．この $\mathcal{N}=2$ 超対称性を用いて BRS 変換を定義するのがトポロジカルツイストだった．ツイストは，内部自由度の添字 i と $SU(2)_R$ の添字 $\dot{\alpha}$ を同一視することで実現された（3 章参照）．フェルミオンの場は以下のように再定義される．

$$
\psi_\mu = \lambda_{\alpha\dot{\beta}}\sigma^{\alpha\dot{\beta}}_\mu, \quad \chi_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \quad \eta = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \quad \cdots \tag{5.232}
$$

同様に，対称性のパラメータも ζ^i_α が ζ^μ に，$\bar{\zeta}_{\dot{\alpha}i}$ が $\zeta^{\mu\nu}$ と ζ になる．もちろん $\zeta^{\mu\nu}$ は自己双対である．3 章では，ドナルドソン理論のときのツイストした BRS 対称性はスカラーの部分（ζ で生成される部分）だけを書いていたが，ζ^μ と $\zeta^{\mu\nu}$ も含めて書き出すと

$$
\begin{aligned}
\delta A_\mu &= -i\zeta\psi_\mu - i\zeta_\mu\eta - 2i\zeta^\rho\chi_{\rho\mu} - i\zeta^{\rho\nu}g_{\rho\mu}\psi_\nu \\
\delta\psi_\mu &= i\zeta D_\mu\phi - 4\zeta^\nu F^+_{\nu\mu} + i\zeta_\mu[\phi,\bar{\phi}] - i\zeta^{\rho\nu}g_{\rho\mu}D_\nu\phi \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

という超対称変換であることがわかる．超対称生成子も同様にツイストすることで $Q, Q^\mu, Q^{\mu\nu}$ が得られるわけである．例えば $Q^\mu = Q^{\alpha a}\sigma^\mu_{\alpha a}$ である．ここで $\zeta^{\mu\nu}=0$, $\zeta^\mu \propto V^\mu(x) = \Omega^\mu_\nu x^\nu$ とした超対称変換を考える．これを用いて $\tilde{Q}=Q+V^\mu Q^\mu$ を導入し，新たな BRS 作用素的なものとして扱う．そうすると，Ω-背景がある 6 次元の理論から出発し 4 次元にリダクションして作った作用は $\tilde{Q}\Psi$ と表される，すなわちコホモロジカル位相的場の理論として構築されていることが

確かめることができる．したがって，コホモロジカル位相的場の理論で使われる様々な良い性質が今の場合にも通用することがわかる．

Ω-背景から出発することで変形された作用について超場形式からも考察してみよう．今の作用を超場を用いて表すと 1.7 節で見たように

$$S \sim \mathrm{Im}\int d^4x d^4\theta\, \mathcal{F}(\Phi_{N=2})$$

$$\Phi_{N=2} = \Phi(y,\theta_1) + i\sqrt{2}\theta_2 W(y,\theta_1) + \theta_2\theta_2 G(y,\theta_1) \tag{5.233}$$

で，Ω-背景が入る前の古典作用は $\mathcal{F}(\Phi_{N=2}) = \tau\Phi_{N=2}^2$ で与えられていた．Ω-背景を入れて出発することによる作用の変形は，複素結合定数の変形

$$\tau \longrightarrow \tau'(x,\theta) = \tau - \frac{i}{\sqrt{2}}\left\{(\bar{\Omega}_{\mu\nu})^+\theta^\mu\theta^\nu + \frac{i}{2\sqrt{2}}\bar{\Omega}_{\mu\nu}\Omega^\mu{}_\rho x^\rho x^\nu\right\}$$

と解釈することができる．ここで θ^μ は $\theta_{i\alpha}$ をトポロジカルツイストして得られるもので，$\theta^\mu = \bar{\sigma}^{\mu i\alpha}\theta_{i\alpha}$ である．このことは $\mathcal{F}(\Phi_{N=2}) = \tau'\Phi_{N=2}^2$ として θ 積分を実行することで直接確かめることができる．結局，超場形式の観点では，Ω 背景の導入による作用の変形は，単に結合定数の純虚数部分の変化に比例した $(\tau' - \tau)\Phi_{N=2}^2$ である．この変形部分はインスタントン数の項 $\int F_\wedge F$ と同様にトポロジカルな項，すなわち全微分で書ける項であることも容易にわかるので確かめられたし．

こうした考察を用いて，分配関数を評価する．$\tilde{Q}$-完全 (exact) で作用が得られていることから，コホモロジカル位相的場の理論の一般論に従い，$\tilde{Q}$ 固定点の固定点からの寄与のみで経路積分が評価できる．固定点はヒッグスの期待値 a で指定され，その周りで経路積分を実行すると，固定点での有効作用が得られるべきだというのが，ウィルソン流の有効作用の思想であった．したがって

$$Z(a,\Omega) \sim \exp -\mathrm{Im}\, i\int d^4x d^4\theta\, \mathcal{F}(a,\tau')$$

が得られる．さらに τ' が同変外微分

$$d - \frac{i}{2\sqrt{2}} i_V = \theta^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{i}{2\sqrt{2}}\Omega^\mu{}_\nu x^\nu \frac{\partial}{\partial\theta^\mu}$$

を作用すると 0 であることに注意して，積分 $\int d^4xd^4\theta\mathcal{F}$ を局所化公式を用いて評価する．

$$\Omega^{\mu\nu}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Omega}^{\mu\nu}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & \bar{\varepsilon}_1 & 0 & 0 \\ -\bar{\varepsilon}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\varepsilon}_2 \\ 0 & 0 & -\bar{\varepsilon}_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.234}$$

とすると，$\left(d-\frac{i}{2\sqrt{2}}i_V\right)^2=i\mathcal{L}_V$ の固有値，つまりトーラス作用の重みが $i\varepsilon_1/4$ と $i\varepsilon_2/4$ であるので，局所化公式（定理 5.1) より

$$Z(a,\Omega)\sim\exp\left(-\frac{\mathcal{F}}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\right)$$

が得られるのである．

5.5　最後に

この章では非可換空間上に定義された位相的場の理論の性質と，その一つの応用の大きな成果であるネクラソフの公式について見てきた．超対称ゲージ理論としての観点からは一つの到達点に達しているように感じられるかもしれないが，実のところ背後にはさらに大きな広がりが隠されている．それはやはり超弦理論とのかかわりの中に見られるものである．

残念ながら，超弦理論に関しての記述と準備が少ないためにそういったことの解説ができないのであるが，実に魅力的な理論体系が見えてきているのだ [66–68].

この本に欠けている視点はやはり超弦理論と幾何の関係である．きっちりと超弦理論を学ぶことで，位相的弦理論とそれを利用してミラー対称性やグロモフ-ウィッテン不変量 (M. Gromov, E. Witten) に関しても議論できる．また，この本に現れた双対性の弦理論からの解釈や，非可換空間上のゲージ理論と D-ブレーンの関係なども議論でき，非常に広大なフィールドを駆け巡ることができるのである．しかし，そのための準備にはやはり最低でもこの本と同じくらいの厚

さがさらに必要になってしまう．

いずれにしても，今なお発展中の分野であり謎も多い．読者も，ある面では理解が深まったかもしれないが，別の面では謎が深まったのではないだろうか．その感想は筆者自身も感じているものである．未来への課題と未練を抱えつつもこれで了とする．

参考文献

[1] 中原幹夫著，佐久間一浩訳 『理論物理学のための幾何学とトポロジー I, II』（ピアソン・エデュケーション）2001.

序文で引用.

本書では詳細に触れなかったアノマリーについて書かれたものとして代表的なものを 1 点だけあげると次のものがある.

[2] 藤川和男『経路積分と対称性の量子的破れ』（岩波書店）2001.

他に本書を読むにあたり参考になるテキストとして，小林昭七 『接続の微分幾何とゲージ理論』（裳華房）1989，茂木勇，伊藤光弘 『微分幾何学とゲージ理論』（共立出版）2001，などがある.

第 1 章

粒子の力学については，次が簡潔でお勧めだ.

[3] ランダウ，リフシッツ『力学』（東京図書）1967.

弦理論は以下の本を参考にした.

[4] 吉川圭二 『弦の量子論』（朝倉書店）1991.

[5] J. ポルチンスキー著，伊藤克司，松尾泰，小竹悟訳 『ストリング理論 第 1 巻，第 2 巻』（シュプリンガー・フェアラーク東京）2005, 2006.

[6] 太田信義 『超弦理論・ブレイン・M 理論』（シュプリンガー・フェアラーク東京）2002.

場の理論については，次が和書では定番だ.

[7] 九後汰一郎 『ゲージ場の量子論 I, II』（培風館）1989.

非常に詳細なことまで知りたい読者は，

[8] S. ワインバーグ著，青山秀明，有末宏明，杉山勝之訳 『ワインバーグ場の量子論』全 6 巻（吉岡書店）1997-2003,

に当たるのがよいであろう.

他にも場の理論の教科書で最近の出版に限っても，

[9] 石川健三 『場の量子力学』（培風館）2006,
坂井典佑 『場の量子論』（裳華房）2002,

[10] 近藤慶一『ゲージ場の量子論入門』（サイエンス社）2006,

[11] 川村嘉春 『例題形式で学ぶ現代素粒子物理学』（サイエンス社）2006,

等々いろいろな個性ある良書が沢山あるので適宜目的にあわせて当たるのがよいと思われる．

経路積分については，次が詳しい．

[12] M.S. スワンソン著，青山秀明，川村浩之，和田信也訳 『経路積分法』（吉岡書店）1996.

超対称理論の定番は，

[13] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmery and Supergravity*, Princeton Univ. Press, 1992.

和書では最近出版されたもので以下の本がある．

[14] 太田信義，坂井典佑 『超対称性理論』（サイエンス社）2006.

数学者向けに場の理論や弦理論について一流の物理学者達によって解説されたものとして以下がある．

[15] P. Deligne, D. Kazhdan, P. Etingof, J.W. Morgan, D.S. Freed, D.R. Morrison, L.C. Jeffrey and E. Witten, *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians* Vol.1,2, AMS Institute for Advanced Study, 1999.

第 2 章

BPS については特に, 筑波大の石橋延幸氏の 1996 年に夏の学校で行った講義録を参考にした．しかしその講義録は現在は手に入らないようである．

双対性についての原論文は，

[16] N. Seiberg and E. Witten, *Monopole Condensation, And Confinement In N=2 Supersymmetric Yang-Mills Theory*, Nucl. Phys. B **426** (1994), 19.
N. Seiberg and E. Witten, *Monopoles, Duality and Chiral Symmetry Breaking in N=2 Supersymmetric QCD*, Nucl. Phys. B **431** (1994), 581.

なお次の W. Lerche によるレヴュー論文と S. Weinberg の教科書は 2 章を書く上で非常に参考になった．

[17] W. Lerche, *Introduction to Seiberg-Witten Theory and its Stringy Origin*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **55B** (1997), 83-117, (`hep-th/9611190`).

[18] S. Weinberg 著，青山秀明，有末宏明，杉山勝之訳『ワインバーグ 場の量子論』の 6 巻（吉岡書店）2003.

場の理論の参考文献のところにすでに挙げているが, 特に 6 巻は現代的な諸相について語られており, 双対性についても詳しく論じられている．

次のレクチャーもまとまっていて大変参考になった.

[19] E. D'Hoker and D. H. Phong, *Lectures on Supersymmetric Yang-Mills Theory and Integrable Systems* (1999), (`hep-th/9912271`).

[20] N. Seiberg, *Supersymmetry And Nonperturbative Beta Functions*, Phys. Lett. **206B** (1988), 75.

[21] V. Novikov, M. Schifman, A. Vainstein, M. Voloshin and V. Zakharov, *Supersymmetry Transformations Of Instantons*, Nucl. Phys. **B229** (1983), 394.
V. Novikov, M. Schifman, A. Vainstein and V. Zakharov, *Exact Gell-Mann-Low Function Of Supersymmetric Yang-Mills Theories From Instanton Calculus*, Nucl. Phys. **B 229** (1983), 381, 407.

第 3 章

位相的場の理論については古田幹夫氏，深谷賢治氏などのホームページ (http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~furuta/, http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~fukaya/) にある一連の講義録が参考になる．また，このテキストでは触れていない事に関しても簡潔に解説してあるものに江口徹氏による以下のものがある.

[22] 江口徹，位相的場の理論とその周辺,『98 年度研究会講義録』.

この講義録は WEB サイト（http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/japanese/tokutei99.html）からもダウンロードできる.

数学者向きの日本語の教科書としては以下のものがある.

[23] 深谷賢治 『ゲージ理論とトポロジー』（シュプリンガー・フェアラーク東京）1995.

[24] J.W. モーガン著，二木昭人訳 『サイバーグ・ウィッテン理論とトポロジー』（培風館）1998.

[25] 二木昭人 『微分幾何講義 一般理論と現代物理への応用』（サイエンス社）2003.

マタイ-キレン形式に関しては，以下の論文を参考にした.

[26] M. Blau, *The Mathai-Quillen Formalism and Topological Field Theory*, J. Geom. Phys. **11** (1993), 95-127, (`hep-th/9203026`).

[27] D. Birmingham, N. Blau, M. Rakowski and G. Thomson, *Topological Field Theory*, Phys. Rep. **209** (1991), 129.

次も読みやすくまとまっている.

J.M.F. Labastida, C. Lozano, *Lectures in Topological Quantum Field Theory*, (`hep-th/9709192`) 等.

サイバーグ-ウィッテン不変量の原論文は,

[28] E. Witten, *Monopoles and Four-Manifolds*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 769.

E. Witten, *Supersymmetric Yang-Mills Theory On A Four-Manifold*, J. Math. Phys. **35** (1994), 5101.

[29] P. Kronheimer and T. Mrowka, *Recurrence relations and asymptotics for four-manifold invariants*, Amer. Math. Soc. **29** (1994).

[30] E. Witten, *The N matrix model and gauged WZW models*, Nucl. Phys. **B371** (1992), 191-245.

ドナルドソン不変量とサイバーグ-ウィッテン不変量の関係とツイストについては，次のものが物理的手法で記述されている．

[31] S. Hyun, J. Park and J.-S. Park, *Topological QCD*, Nucl. Phys. **B453** (1995) 199-224, (`hep-th/9503201`).

S. Hyun, J. Park and J.-S. Park, *N=2 Supersymmetric QCD and Four Manifolds; (I) the Donaldson and the Seiberg-Witten Invariants*, (`hep-th/9508162`).

[32] G. Moore and E. Witten, *Integration over the u-plane in Donaldson theory*, Adv. Theor. Math. Phys. **1** (1998) 298-387, (`hep-th/9709193`).

ヴァッファ-ウィッテン理論に関しては原論文を参考にした．

[33] C. Vafa and E. Witten, *A Strong Coupling Test of S-Duality*, Nucl. Phys. **B431** (1994), 3.

C. Vafa, *Gas of D-Branes and Hagedorn Density of BPS States*, Nucl. Phys. **B463** (1996), 415-419, (`hep-th/9511088`).

C. Vafa, *Instantons on D-branes*, Nucl. Phys. **B463** (1996), 435-442, (`hep-th/9512078`).

[34] R. Dijkgraaf, J. Park and B. Schroers, *N=4 Supersymmetric Yang-Mills Theory on a Kaehler Surface*, (`hep-th/9801066`).

[35] A. Sako and T. Sasaki, *Euler number of Instanton Moduli Space and Seiberg-Witten Invariants*, J. Math. Phys. **42** (2001), 130, (`hep-th/0005262`).

第 4 章

[36] 前田吉昭，梶浦宏成 『変形量子化入門』（東京大学セミナリーノート 20）2002.

[37] T. Yoneya, *On The Interpretation Of Minimal Length In String Theories*, Mod. Phys. Lett. **A4** (1989), 1587.

T. Yoneya, *String Theory and the Space-Time Uncertainty Principle*, Prog. Theor. Phys. **103** (2000), 1081-1125, (`hep-th/0004074`).

[38] N. Seiberg and E. Witten, *String Theory and Noncommutative Geometry*, JHEP 9909 (1999), 032, (`hep-th/9908142`).

[39] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert Schemes of Points on Surfaces*, AMS University Lecture Series **18** (1999).

非可換理論のレクチャーは次を参考にしている．特に非可換インスタントンの構成法はこれに従った．

[40] Nekrasov, (`hep-th/0011095`).

日本語による非可換インスタントンの優れた解説は以下のものがある．

[41] 浜中真志 "ADHM/Nahm 構成法とその双対性",『素粒子論研究』106-1 (2002-10), 1.

特にツイスターの立場から丁寧に ADHM 構成法について書かれているのは次である．

[42] 高崎金久『ツイスターの世界 —時空・ツイスター空間・可積分系—』(共立出版) 2005.

その他の内容は，以下を参照してほしい．

[43] T. Ishikawa, S.-I. Kuroki and A. Sako, *Elongated $U(1)$ instantons on Noncommutative R^4*, JHEP 11 (2001), 068, (`hep-th/0109111`).

[44] K. Furuuchi, *Topological Charge of $U(1)$ Instantons*, (`hepth0010006`).

[45] T. Ishikawa, S.-I. Kuroki and A. Sako, *Calculation of the Pontrjagin class for $U(1)$ instantons on noncommutative* $\mathbb{R}^4$, JHEP 08 (2002), 028, (hep-th/0201196).

[46] A. Sako, *Instanton number of Noncommutative $U(n)$ gauge theory*, JHEP 04 (2003), 023, (`hep-th/0209139`).

図などでは共同研究者の石川君，黒木君が作ってくれたものが沢山使われている．

[47] H. Ooguri and C. Vafa, *The C-Deformation of Gluino and Non-planar Diagrams*, Adv. Theor. Math. Phys. **7** (2003), 53-85, (`hep-th/0302109`).
H. Ooguri and C. Vafa, *Gravity Induced C-Deformation*, Adv. Theor. Math. Phys. **7** (2004), 405-417, (`hep-th/0303063`).

[48] N. Seiberg, *Noncommutative Superspace, N=1/2 Supersymmetry, Field Theory and String Theory*, JHEP 0306 (2003), 010, (`hep-th/0305248`).

[49] S. Ferrara and M.A. Lledo, *Some Aspects of Deformations of Supersymmetric Field Theories*, JHEP 0005 (2000), 008, (`hep-th/0002084`).

第 5 章

[50] A. Sako, S.-I. Kuroki and T. Ishikawa, *Noncommutative Cohomological Field Theory and GMS soliton*, J. Math. Phys. **43** (2002), 872-896, (`hep-th/0107033`).

A. Sako, *Noncommutative Cohomological Field Theories and Topological Aspects of Matrix models*, (hep-th/0312120).

[51] N. Dorey, V.V. Khoze and M.P. Mattis, *Supersymmetry and the Multi-Instanton Measure*, Nucl. Phys. **B513** (1998), 681-708, (hep-th/9708036).

[52] G. Moore, N. Nekrasov and S. Shatashvili, *Integrating Over Higgs Branches*, Commun. Math. Phys. **209** (2000), 97-121, (hep-th/9712241).

[53] R. Flume and R. Poghossian, *An Algorithm for the Microscopic Evaluation of the Coefficients of the Seiberg-Witten Prepotential*, Int. J. Mod. Phys. **A18** (2003), 2541, (hep-th/0208176).

[54] N. Nekrasov, *Seiberg-Witten Prepotential From Instanton Counting*, Adv. Theor. Math. Phys. **7** (2004), 831-864 , (hep-th/0206161).

[55] A.S. Losev, A. Marshakov and N. Nekrasov, *Small Instantons, Little Strings and Free Fermions*, (hep-th/0302191).

[56] J.J. Duistermaat and G.J. Heckman, *On the Variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space*, Invent. Math. **69** (1982), 259.

[57] M. Atiyah and R. Bott, *The Moment map and equivariant cohomology*, Topology **23** (1984), 1.

[58] E. Witten, *Two-dimensional gauge theories revisited*, J. Geom. Phys. **9** (1992), 303-368, (hep-th/9204083).

[59] U. Bruzzo and F. Fucito, *Superlocalization Formulas and Supersymmetric Yang-Mills Theories*, Nucl. Phys. **B678** (2004), 638, math-ph/0310036.

[60] N. Berline, E. Getzler and M. Vergne, *Heat Kernels and Dirac Operators*, GLT, Springer.

[61] A. Sako and T. Suzuki, *Dimensional Reduction of Seiberg-Witten Monopole Equations, $N=2$ Noncommutative Supersymmetric Field Theories and Young Diagrams*, (hep-th/0511085).

[62] U. Bruzzo, F. Fucito, J.F. Morales and A. Tanzini, *Multi-Instanton Calculus and Equivalent Cohomology*, JHEP **0305** (2003), 054, (hep-th/0211108).

[63] N. Nekrasov and A. Okounkov, *Seiberg-Witten theory and random partitions*, (hep-th/0306238).

なおネクラソフの公式の証明は，ネクラソフ-オクニコフと同時期に中島啓氏，吉岡康太氏により与えられ，その日本語による解説が中島氏の WEB ページにある．http://www.math.kyoto-u.ac.jp/˜nakajima/ の下にある「インスタントンの数え上げ–

Nekrasov の予想，戸田階層，blowup 公式」，第 6 回代数群と量子群の表現論研究集会報告集原稿.

他にも同内容の中島氏による和文解説に “4 次元ゲージ理論の新展開– Nekrasov の分配関数”, 数理科学 2005 年 8 月号，がある．また，原論文は次である．

[64] H. Nakajima and K. Yoshioka, *Instanton counting on blowup*, I, (math.AG/0306198).

[65] S.V. Shadchin , *Sur quelques aspects de correspondance entre la theorie des cordes et theorie de Jauge*, Docteur de l'Ecole polytechnique (2005), 53(043), 2005/SHA.

[66] 菅野浩明，佐古彰史 『位相的弦理論と重力・ゲージ理論対応』（慶應義塾大学）2005.

[67] 江口徹，今村洋介 『岩波講座物理の世界 素粒子の超弦理論』（岩波書店）2005.

次の文献は，東大の素粒子論研究室の WEB ページ (http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/japanese/tokutei99.html) からダウンロードできる．

[68] *M-Theory, Topological Strings and Large N Gauge Theory.*

これは，東京大学で行われた R. Gopakumar によるレクチャーを，秦泉寺雅夫氏，那珂通博氏が和文講義録にまとめたものである．

N = 2 *Gauge Theories and String Theory.*

これは N. Nekrasov の講義を，橋本幸士氏，岸本巧氏が和文講義録にまとめたものである．

以上が本書の参考文献であるが，参考文献を詳細にわたって挙げると膨大になる．そのため，日本語で読めるものを中心に，この教科書と関係が非常に深いものに限定して，なおかつ同様の教科書が多数ある場合は，私がよく使っているものを少しだけに絞って列挙した．

索　引

● さ行

● た行

● な行

● は行

● ま行

● や行

● ら行

● わ行

佐古 彰史（さこ・あきふみ）

略歴

1970年　北海道に生まれる．
1993年　北海道大学理学部卒業．
1998年　北海道大学大学院理学研究科博士課程修了．
現　在　釧路工業高等専門学校一般教科准教授．
　　　　慶應義塾大学理工学部訪問研究員．
　　　　理学博士．

超対称（ちょうたいしょう）ゲージ理論（りろん）と幾何学（きかがく）
——非摂動的アプローチ

2007年 9月15日　第1版第1刷発行
2007年10月31日　第1版第2刷発行

著　者　佐古　彰史
発行者　林　　克行
発行所　株式会社　日本評論社
〒170-8474 東京都豊島区南大塚3-12-4
電話　(03) 3987-8621 [販売]
(03) 3987-8599 [編集]
印　刷　三美印刷株式会社
製　本　精光堂
装　幀　神田　程史 [レフ・デザイン工房]

ISBN978-4-535-78468-0